UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE DERECHO

TESIS DOCTORAL

Las estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático en derecho

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

José Rossiñol de Zagranada Canals

DIRECTOR:

Luis Legaz Lacambra

Madrid, 2015

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE DERECHO

LAS ESTRUCTURAS BASICAS DEL PENSAMIENTO LOGICO-MATEMATICO EN EL DERECHO

José Rossiñol de Zagranada Canals

1976

LAS ESTRUCTURAS BASICAS DEL PENSAMIENTO LOGICO-MATEMATICO EN EL DERECHO

Tesis doctoral redactada por el Licenciado D. JOSE ROSSIÑOL DE ZAGRANADA CANALS bajo la dirección del Doctor D. LUIS LEGAZ LACAMBRA, Catedrático de la Facultad de Derecho de la Universidad Complutense de Madrid.

INTRODUCCION

Al principio de un capítulo que titula "Problemas generales de la investigación interdisciplinaria y mecanismos comunes", perteneciente al primer volumen de la obra colectiva de la Unesco "Tendances principales de la recherche dans les sciences sociales et humaines" (1), dice Piaget lo siguiente:

"La investigación interdisciplinaria puede nacer de dos clases de preocupaciones, unas relativas a las estructuras o a los mecanismos comunes y otras a los métodos comunes, pudiendo ambas, naturalmente, intervenir a la vez. Como ejemplo de las primeras, se puede citar tal o cual análisis del estructuralismo

---

1) Una selección de los trabajos incluídos en el primer volumen al que me he referido (selección en la que figura el indicado capítulo) ha sido editada, en versión española de Pilar Carrillo y bajo el título "Tendencias de la investigación en las ciencias sociales", por "Alianza Editorial", en Madrid

lingüístico, que lleve a preguntarse si las estructuras elementales encontradas tienen alguna relación con la lógica o con estructuras de la inteligencia... Como ejemplo del segundo tipo de preocupaciones, o de ambos tipos a la vez, se pueden citar las múltiples aplicaciones de la "teoría de juegos"..." (1).

Luego, en el primer párrafo del último apartado del indicado capítulo, dice: "...al incluir necesariamente en su campo de estudios el sujeto de conocimiento, fuente de las estructuras lógicas y matemáticas de las que, por otra parte, ellas dependen, las ciencias del hombre no se limitan a mantener entre sí un conjunto de relaciones interdisciplinarias..., sino que están insertas en un circuito o red general que, en definitiva, engloba la totalidad de las ciencias... Era indispensable recordar este hecho para poder concluir, de tal manera que estas conclusiones puedan tratar de hacer sentir el verdadero alcance de las relaciones interdisciplinarias".

---

en 1973. A esta edición española me referiré en citas sucesivas.

1) Piaget, obra y traducción citadas, pág. 199.

A continuación, en el párrafo siguiente, prosigue, diciendo:

"Pues, efectivamente, este alcance sobrepasa con mucho el de una simple facilitación del trabajo, que es a lo que se reduciría si no se tratara más que de explorar en común regiones fronterizas. Esta última forma de concebir la colaboración entre especialistas de diferentes ramas sería la única admisible si se admitiera un postulado al cual siguen todavía inconscientemente apegados unos cuantos investigadores: que las fronteras de cada disciplina científica están fijadas de una vez por todas y que se mantendrán necesariamente en el futuro. Pues bien, el primer objetivo de una obra como ésta, que trata de las tendencias y no de los resultados, de las perspectivas y de la prospectiva de las ciencias del hombre y no solamente de su estado presente, es más bien el de hacer comprender que en realidad el propósito de toda tendencia innovadora es el de alejar las fronteras en la dimensión longitudinal y el de someterlas a discusión en las dimensiones transversales. El verdadero objeto de la investigación interdisciplinaria es, pues, la reestructuración o reorganización de los dominios del saber, por medio de intercambios que consisten en realidad en recombinaciones constructivas" (1).

Finalmente termina Piaget su interesante capítulo afirmando que "independientemente de las divergencias en cuanto a formación universitaria, que constituyen sin duda el principal obstáculo que hay que superar, las técnicas lógico-matemáticas comunes, cuyo empleo tiende a generalizarse, constituyen a la vez el mejor índice de confluencia que se impone y el mejor instrumento de unión" (2).

Estoy de acuerdo con las precedentes palabras de Piaget y entiendo también que el empleo de las técnicas lógico-matemáticas al que se refiere dicho autor requiere asimismo la previa delimitación de las particulares estructuras, también de carácter lógico-matemático, de que estén dotados los conjuntos de elementos a los que se pretenda aplicar las referidas técnicas. Teniendo en cuenta, pues, la específica na-

1) Piaget, obra y traducción citadas, pág. 280.

2) Piaget, obra y traducción citadas, pág. 282.

turaleza de la ciencia jurídica -o de las ciencias ju rídicas- en el contexto general de las ciencias del hombre y la consiguiente necesidad de un análisis par ticularizado de las estructuras lógico-matemáticas a considerar en el Derecho, trato de ofrecer aquí, en forma simple y elemental, un ensayo -que no pretendo que sea exhaustivo ni mucho menos- de iniciación al indicado análisis.

El concepto fundamental a utilizar para dicho análisis es, naturalmente, el concepto de estructura. Ahora bien, la existencia de una estructura requiere la existencia previa de un conjunto que esté dotado de tal estructura, por lo que la iniciación en el estudio de la teoría de conjuntos, que debe preceder por ello forzosamente a la introducción del mencionado concepto de estructura, resulta indispensable para se guir el desarrollo de cualquier trabajo sobre estructuras como el presente. De acuerdo, pues, con las pre cedentes consideraciones, dedico el primer capítulo a exponer algunos conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos que entiendo pueden ser de utilidad para seguir el desarrollo del resto del trabajo.

Por otra parte, hace falta también delimitar cuanto antes el concepto de estructura, en general, que utilizaré en el sucesivo desarrollo de este trabajo, y definir asimismo los conceptos de estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático, sin perjuicio de desarrollar y fijar esos conceptos de estas últimas en los capítulos que dedicaré a cada uno de los tres tipos peculiares de las mismas, en particular. A esos conceptos, pues, de estructura, en general, y de estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático, en particular, me refiero someramente en el segundo capítulo.

Tanto en esos dos capítulos preliminares como en el resto del trabajo trato de iniciar desde su misma base la exposición de teorías y correspondiente introducción de conceptos procedentes de la Lógica y de las Matemáticas destacando, al propio tiempo, las relaciones -directas o indirectas- que entiendo existen entre tales teorías y conceptos y el Derecho en cada caso concreto. Creo que, al facilitar la continuidad en la lectura, este procedimiento es mejor que el consistente en dedicar una primera parte a la exposición de conceptos y teorías procedentes de la Lógica y de las Matemáticas y una segunda parte al estudio de las relaciones con el Derecho de tales conceptos y teorías.

En otro orden de ideas, si pretendemos estudiar las relaciones del Derecho con las estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático podemos observar dos aspectos perfectamente diferenciados en relación con tal estudio: el primero de ellos tiene como base la observación y delimitación de estructuras lógico-matemáticas de que estén dotados conjuntos de elementos específicamente jurídicos y el segundo se refiere al transporte al campo del Derecho de estructuras del indicado tipo observadas en disciplinas conexas, como la Economía, la Sociología y, particularmente, la Ciencia política, en las cuales las técnicas lógico-matemáticas vienen aplicándose con indudable éxito. Tampoco he creído oportuno, no obstante, derivar de la consideración de esos dos aspectos una división en dos partes del presente trabajo para no entorpecer con ello el orden lógico que me propongo seguir en la exposición básica de los conceptos previos de Lógica y Matemáticas que entiendo deben constituir el armazón de dicho trabajo. Así, pues, las relaciones de tales conceptos previos con el Derecho se irán exponiendo a me dida que se introduzcan esos mismos conceptos previos -de Lógica y Matemáticas- sin tener en cuenta, en el orden que se siga, la mencionada diferenciación.

- - -

CAPITULO I.- EXPOSICION ELEMENTAL DE ALGUNOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE CONJUNTOS.

1. Conjuntos. Elementos. Pertenencia de un elemento a un conjunto.

Decía Rey Pastor: "Si alguien nos pidiera una definición de la Matemática futura, eligiendo entre las muchas que se han propuesto, diríamos, por ej. que será la Ciencia de los Conjuntos; y si a continuación nos preguntaran qué expresa esta palabra conjunto, nos veríamos muy apurados para dar una definición aceptable. Se ha dicho (1) que el significado de esta palabra no difiere del vulgar; pero esto no es completamente exacto..." (2). En el sentido expuesto, de definición que se adapta al significado vulgar de la palabra "conjunto", puede valer la siguiente, dada

"1) En este sentido, puede verse, por ejemplo: Borel, Leçons sur la theorie des fonctions, París, 1914."

2) Rey Pastor, La Matemática superior. Métodos y Problemas del siglo XIX, Buenos Aires, 1951, pág. 17.

por Cantor: "Se entiende por "conjunto" un agrupamien to en un todo de objetos perfectamente diferenciados en nuestra intuición o en nuestro pensamiento" (1). Reproduzco esta "definición" de "conjunto" con las debidas reservas, sólo a título informativo y pensando en su utilidad para esa mínima exposición elemental y abreviada de conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos que estimo imprescindible con vistas a los fines que persigo con el presente estudio, de acuerdo con lo que he indicado ya en la introducción al mismo. La palabra "objetos" que figura en la citada "definición" de Cantor debe ser entendida en el sentido más general posible, o sea que, entre tales "objetos", quedan incluídos los objetos materiales (en sentido corriente), las ideas, las personas, etc.

De todos modos, si pretendiéramos formular una definición rigurosa de "conjunto", por tratarse de un concepto primario, incurriríamos, de una forma u otra, en circularidad. Por otra parte, lo que, en general, interesa, más que una rigurosa definición del término "conjunto" a utilizar, es la forma correcta de deter-

---

1) Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Berlín, 1932, pág. 282.

minación inequívoca de cada conjunto particular; así, pues, conviene precisar ahora que, en el desarrollo del presente estudio, consideraremos determinado un conjunto de (o formado por) elementos cuando se pueda distinguir perfectamente si un "ente" (u "objeto", en el sentido general indicado) es o no es un elemento de dicho conjunto o sea, siguiendo la terminología corriente, si tal ente -o elemento- pertenece o no pertenece al indicado conjunto. Esta relación de pertenencia es la relación primaria en teoría de conjuntos y está íntimamente ligada con la predicación.

Por la importancia que tiene la indicada relación de pertenencia, en teoría de conjuntos y en sus aplicaciones, y por la trascendencia de sus conexiones con la teoría de la predicación, entiendo que se impone aquí un análisis algo más detallado sobre dicha relación y las citadas conexiones; entiendo asimismo, no obstante, que, con objeto de simplificar y abreviar la exposición ante todo, nos va a ser también de utilidad que hable previamente del simbolismo que para ello vamos a utilizar:

Los conjuntos y los elementos suelen designarse abreviadamente mediante símbolos gráficos: en general, se usan, como tales símbolos, letras de diversos alfabetos o bien, en algunos casos, combinaciones de letras o de letras y otros signos. Una letra (o una combinación de letras o de letras y otros signos) puede representar tanto a un elemento -o a un conjunto- determinado como a un elemento -o a un conjunto- cualquiera, indeterminado, arbitrario o variable, de acuerdo con lo que nos interese para cada caso particular.

Cuando un elemento -o un conjunto- viene designado por una combinación de varios símbolos, que deben insertarse en una relación como tal representación de un solo elemento -o de un solo conjunto-, o sea, como si se tratara, en general, de una sola letra, suelen escribirse entre paréntesis o corchetes todos los símbolos mediante los que queda determinado tal elemento -o tal conjunto-.

Citaré, para fijar las ideas expuestas, cinco ejemplos de conjuntos que designaré por las letras B, E, J, N y P, respectivamente, o sea que llamaré ahora:

B, al conjunto formado por todos los libros de una biblioteca determinada.

E, al conjunto formado por el Código Civil y el Código de Comercio españoles vigentes en el día de hoy.

J, al conjunto formado por todos los Jueces de primera instancia en servicio activo en España, también en la actualidad.

N, al conjunto formado por todos los números naturales.

P, al conjunto formado por todos los números naturales pares.

Para expresar que un elemento e pertenece a un conjunto C se escribe, simbólicamente, $e \in C$, y $a \notin C$ significa que el elemento a no pertenece al conjunto C. Así, para el conjunto E indicado, si designamos por c y p, respectivamente, a los Códigos Civil y Penal vigentes en España en el día de hoy, podemos escribir $c \in E$ y $p \notin E$. También puede escribirse $C \ni e$, que significa "el conjunto C contiene al elemento e" y $C \not\ni a$, que significa "el conjunto C no contiene al elemento a".

Volviendo ahora al análisis de las conexiones de la relación de pertenencia con la teoría de la predicación, consideremos primero un predicado monádico, por ejemplo "vive", y designemos asimismo por V al conjunto formado por los seres que viven: es evidente que queremos expresar lo mismo al escribir "$x \in V$" que al escribir "x vive". A análoga conclusión llegamos utilizando un predicado diádico: así, por ejemplo, es lo mismo decir "y es hijo de a", siendo "a" un indivíduo determinado, que decir "y pertenece al conjunto formado por los hijos de a"; al variar "a" se obtendrán asimismo, normalmente, nuevos conjuntos.

La rigurosa determinación de qué elementos pertenecen a cada conjunto que interese constituye actualmente preocupación básica de los especialistas en cada una de las distintas ciencias en particular; así, en el primer ejemplo citado, es fundamental en Biología (y no es, desde luego, tarea fácil para los biólogos) la determinación inequívoca de cuales sean los elementos que pertenecen al conjunto que he designado por V. Por otra parte, e íntimamente ligado con el problema de determinación inequívoca de los elementos que pertenecen a cada conjunto en particular, está el problema previo de determinación de cuáles sean precisamente los conjuntos de los que tenga que ocuparse cada ciencia; en el caso considerado, por ejemplo, salta a la vista que la Biología debe ocuparse del conjunto formado por los seres vivos, pero no siempre el hecho de que un conjunto deba ser objeto de estudio para los especialistas en una determinada ciencia salta a la vista con tanta facilidad. Además, el indicado problema de determinación de conjuntos resulta más complejo cuando de lo que se trata es no sólo de decidir si tal o cual conjunto nos interesa sino de precisar, además, cuáles son aquellos conjuntos tales que ellos y sólo ellos nos van a ser de utilidad en la ciencia, en general, o cuestión o problema, en particular, en que estemos interesados.

Tanto por la preocupación que tradicionalmente vienen mostrando los juristas -teóricos y prácticos- por estos problemas de que estoy tratando como por el hecho de estar dedicado precisamente el presente estudio a las relaciones con el Derecho de conceptos lógico-matemáticos entiendo que resulta oportuno proseguir ahora con unas breves referencias extraídas precisamente del campo jurídico. Entiendo, también, que, por la trascendencia que tuvo en la evolución del pensamiento jurídico-penal cuando fué escrita, hace más de doscientos años, y porque sigue siendo una obra básica en el contexto del pensamiento jurídico actual, es justo que me refiera en primer lugar a la breve obra de Beccaria "De los delitos y de las penas" (1). Aunque el problema de la determinación de si una acción concreta debe o no debe, sin ambigüedad alguna, "ser llamada "delito", o castigada como tal" constituye preocupación del autor reflejada a lo largo de toda su obra, los párrafos de la misma que transcribo a continuación son particularmente

---

1) Beccaria, Dei delitti e delle pene, traducción castellana de Juan Antonio de las Casas, 1774. Esta traducción ha sido reeditada, juntamente con otra del Commentaire sur le livre "Des delits et des peines", de Voltaire, por "Alianza Editorial", en Madrid, en 1968. A esta edición de "Alianza Editorial" me referiré en citas sucesivas.

significativos tanto por su relación con la problemá tica a que aludo en el presente capítulo como por la que tienen con otros conceptos -de estructura de orden y de transporte de estructuras, por ejemplo- a los que me referiré en capítulos sucesivos.

Los párrafos de Beccaria cuya transcripción he anunciado son los siguientes:

"Supuesta la necesidad de la reunión de los hom bres, y de los pactos, que necesariamente resultan de la oposición misma de los intereses privados, encontramos una escala de desórdenes, cuyo primer grado consiste en aquellos que destruyen inmediatamente la sociedad y el último en la más pequeña injusticia po sible cometida contra los miembros particulares de ella. Entre estos extremos están comprendidas todas las acciones opuestas al bien público que se llaman delitos, y todas van aminorándose por grados insensi bles desde el mayor al más pequeño. Si la geometría fuese aplicable a las infinitas y oscuras combinacio nes de las acciones humanas, debería haber una escala correspondiente de penas en que se graduasen desde la mayor hasta la menos dura; pero bastará al sabio legislador señalar los puntos principales, sin turbar el orden, no decretando contra los delitos del primer grado las penas del último. Y en caso de haber una exacta y universal escala de las penas y de los delitos, tendríamos una común y probable medida de los grados de tiranía y de libertad y del fondo de humanidad, o de malicia, de todas las naciones."

"Cualquiera acción no comprendida entre los límites señalados no puede ser llamada "delito", o castigada como tal, sino por aquellos que encuentran su interés en darle este nombre. La incertidumbre de estos límites ha producido en las naciones una moral que contradice a la legislación, muchas actuales legislaciones que se excluyen recíprocamente, una multitud de leyes que exponen al hombre de bien a las penas más rigorosas; ha hecho vagos y fluctuantes los nombres de "vicio" y de "virtud", y ha hecho nacer la incertidumbre de la propia existencia, que produce el letargo y el sueño fatal en los cuerpos políticos. Cualquiera que leyere con mirada filosófica los códices de las naciones y sus anales, encontrará casi siempre cambiarse los nombres de "vicio" y de "virtud", de buen "ciudadano" o de "reo", con las revolu ciones de los siglos, no en razón de las mutaciones que acaecen en las circunstancias de los países, y por consecuencia siempre conformes al interés común, sino en razón de las pasiones y de los errores de que sucesivamente fueron movidos los legisladores. Verá muchas veces que las pasiones de un siglo son la basa de la moral de los siglos que le siguen, que las pasiones fuertes, hijas del fanatismo y del entusiasmo, debilitadas y carcomidas (por decirlo así) del tiempo, que reduce todos los fenómenos físicos y morales a la igualdad, vienen poco a poco a ser la prudencia del siglo y el instrumento útil en manos del fuerte y del prudente. De este modo nacieron las oscurísimas nociones de honor y de virtud; y son tales porque se cambian con las revoluciones del tiempo, que hace sobrevivir los nombres a las cosas, se cambian con los ríos y con las montañas que son casi siempre los confines, no sólo de la geografía física, sino también de la moral" (1).

"La incertidumbre de estos límites", a la que

---

1) Beccaria, obra, traducción y edición citadas, págs. 35, 36 y 37.

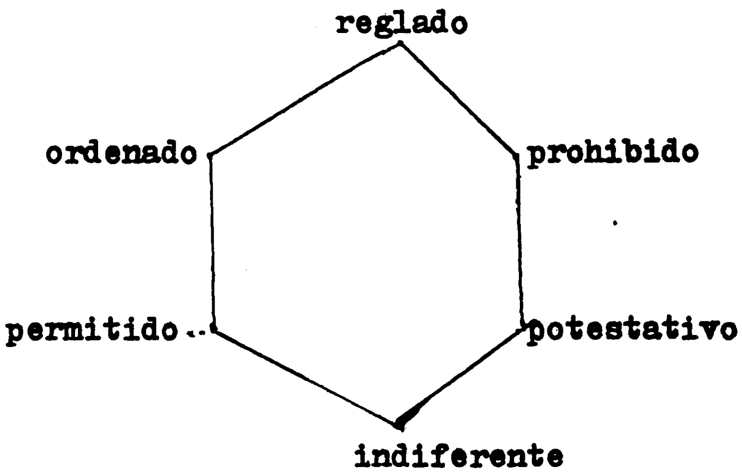
alude Beccaria al referirse a la delimitación de las acciones que, de acuerdo con lo que él mismo dice, pueden ser llamadas "delitos", preocupa asimismo a los penalistas de nuestros días, y el problema de la eliminación de tal incertidumbre (que es precisamente el problema de la determinación del conjunto cuyos elementos son los delitos) sigue siendo fundamental en Derecho penal y constituye una parte importante en el estudio de dicha disciplina. Pero este ejemplo no es único ni mucho menos en el campo jurídico: tanto en el propio Derecho penal como en otras ramas del Derecho pueden observarse otros muchos ejemplos del creciente interés de los juristas por la delimitación de conjuntos concretos y por la determinación de qué conjuntos en particular pueden interesar, bien en el campo jurídico, en general, o bien a una determinada rama del Derecho o a un particular problema, de índole jurídica, que se trate de resolver. Refiriéndome a dos casos tan sólo, entresacados, un poco al azar, de entre los muchísimos que podrían citarse ahora, recordaré simplemente la relación que con la problemática a que me estoy refiriendo tienen los problemas de delimitación específica de los conceptos de decreto-ley y de negocio jurídico.

Por otra parte, cabe destacar también la importancia que la delimitación y correcta selección de conjuntos tienen en lógica deóntica. Para darnos cuenta de tal importancia vamos a comparar entre sí dos etapas en la evolución de dicha lógica, a las que, aunque ambas se han venido desarrollando en este último cuarto de siglo, no creo que fuese impropio denominar, respectivamente, arcaica y actual. La etapa arcaica sería así la de los primitivos estudios de von Wright -a los que se podrían añadir incluso algunos más recientes (1)-, estudios en los cuales pretendía dicho autor fundamentar simplemente la lógica deóntica en una discutible analogía entre las nociones "debe", "puede" y "tiene que no" y las nociones modales (necesidad, posibilidad e imposibilidad), teniendo que prescindir así de algunos functores deónticos cuya importancia en el campo jurídico seguidamente vamos a ver. La etapa actual culminaría en la adaptación a la lógica deóntica de la magnífica cons

---

1) Puede verse, en este sentido, por ejemplo, von Wright, Norma y acción. Una investigación lógica. Traducción de García Ferrero, Madrid, 1970.

trucción de Blanché (1), de acuerdo con la cual tales functores deónticos, que aquí ya son seis, vienen fijados (escritos en forma abreviada) de la siguiente manera:



La utilidad que, en relación con el tema que estoy desarrollando en el presente estudio, tiene esa distribución exagonal, la adaptación de una lógica deóntica basada en esos seis functores a determina-

---

1) Las ideas de Blanché en las que se basan la mencionada construcción y su utilización en lógica deóntica fueron expuestas por dicho autor en su artículo Sur l'opposition des concepts, publicado en "Theoria", 19, 1953, págs. 89 a 130.

dos métodos de cálculo algebraico y las relaciones de esa misma lógica deóntica con las estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático, en general, se irán viendo a lo largo de este mismo estudio; sin embargo, en lo que sí debemos detenernos ahora es en el análisis de las relaciones de la evolución de la lógica deóntica con la problemática a que me estoy refiriendo en este capítulo, para lo cual entiendo que van a ser de utilidad las consideraciones siguientes:

En primer lugar conviene recordar aquí que los functores pueden fácilmente reducirse a predicados y que, como hemos visto antes, la propia predicación implica una relación de pertenencia de unos elementos a un conjunto; en forma más directa, no obstante, puede también apreciarse la relación entre un functor y el hecho de pertenecer unos elementos a un conjunto: utilizando, por ejemplo, el functor "está prohibido", es evidente que queremos expresar lo mismo al escribir que un acto x está prohibido en virtud de una determinada ley L que al escribir que tal acto x pertenece al conjunto formado por los actos que están prohibidos en virtud de la mencionada ley L, o sea que, a fin de cuentas, la utilización de un functor se re duce a la delimitación del conjunto que le correspon de.

En segundo lugar cabe destacar asimismo que, como sabemos muy bien los profesionales del Derecho, las normas jurídicas, en general, no se limitan a obligar (en el sentido de mandar u ordenar), permitir y prohibir, por lo que una lógica deóntica que no haga uso de más functores que "está mandado", "está permitido" y "está prohibido", por muchos esfuerzos que en el desarrollo de la misma se hagan con vistas a la matización de esos tres únicos functores, debe resultar incompleta, y de escasa utilidad, en consecuencia, en el campo específico del Derecho. Las normas jurídicas, por ejemplo, además de mandar, permitir y prohibir, regulan. Esta función de regular de las normas jurídicas reviste suficiente importancia como para que de tal función se derive el nombre genérico de algunas de ellas -los reglamentos-, siendo asimismo corriente observar esa misma función de regular en otras muchas normas que no reciben precisamente esa denominación de reglamentos. La introducción por García Máynez del functor "está reglado" y la inclusión del mismo en esa distribución exagonal de Blanché que he reproducido han significado, pues, unos avances considerables en la fundamentación de la lógica deóntica con vistas a su aplicación al análisis de la problemática específicamente jurídica. Algo semejante puede decirse con relación a cualquier otro functor que, sin estar directamente relacionado con los conceptos lógico-deónticos que prevalecieron en la etapa que, según he dicho, podría llamarse arcaica, figura en la distribución exagonal de Blanché.

Pero la utilización eficaz -desde el punto de vista de los profesionales del Derecho- de un functor en lógica deóntica y la determinación correcta de cuales sean los functores tales que ellos y sólo ellos nos vayan a valer para el desarrollo de esa misma lógica con vistas a su aplicación efectiva en el campo jurídico se reducen, respectivamente, a la delimitación de un conjunto concreto, como hemos visto, y a la determinación de los conjuntos que nos vayan a ser necesarios y suficientes para el objetivo indicado, de modo que, mediante sus esfuerzos encaminados a las mencionadas utilización eficaz y determinación, los juristas -y quienes, sin serlo, se han preocupado por esa problemática específicamente jurídica a la que estoy aludiendo- han venido tratando -consciente o inconscientemente- de relacionar, desde su misma base, con el Derecho esa "Ciencia de los Conjuntos" a la que aludía Rey Pastor, o sea esa Matemática que si entonces, según dicho autor, era futura ha venido convirtiéndose ya, en estos últimos años, en actual.

Así, pues, lo que hemos podido observar, tanto en este último ejemplo sobre fundamentación de la lógica deóntica como en otros ejemplos extraídos del campo jurídico a los que he ido aludiendo, ha sido la adaptación de unos fundamentos específicamente matemáticos al Derecho e incluso la imposibilidad de lograr para ese mismo Derecho -o para la ciencia jurídica- un desarrollo auténticamente racional y efectivo si se prescinde para tal desarrollo de la consideración de esos mismos fundamentos matemáticos. Entiendo que este resultado, al que, por una parte, era necesario llegar, en la búsqueda, desde el origen mismo, de ese "índice de confluencia que se impone" del que habla Piaget, debe constituir, por otra, un poderoso estímulo que nos anime a seguir adelante en el estudio de las relaciones entre el Derecho y los conceptos lógico-matemáticos.

2. Igualdad. Subconjuntos. Inclusión. Familia de conjuntos.

Si consideramos un par de elementos -o de conjuntos-, que, como hemos visto, pueden venir representados (cada uno de ellos) o bien por un símbolo o bien por una combinación de varios símbolos, para indicar que se trata de un par de elementos -o conjuntos- distintos entre sí se escriben las representaciones simbólicas de cada uno de dichos elementos -o conjuntos- una a cada lado del signo $\neq$, que se lee "diferente (o distinto) de", y para expresar que tales símbolos o combinaciones de símbolos representan no a dos elementos -o conjuntos- distintos sino al mismo elemento -o al mismo conjunto- se escriben las dos representaciones simbólicas indicadas una a cada lado del signo =, que se lee "igual a".

Si a un conjunto $\underline{A}$ pertenecen unos elementos $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$,..., $\underline{m}$, y sólo ellos pertenecen a tal conjunto $\underline{A}$, suele designarse simbólicamente a dicho conjunto

A así: $\{a, b, c, \ldots, m\}$, o sea $A = \{a, b, c, \ldots, m\}$. Así, si designamos por c y por m, respectivamente, al Código Civil y al Código de Comercio vigentes en España en el día de hoy, será: $E = \{m, c\}$, o también: $E = \{c, m\}$, pues ahora es indiferente el orden en que se tomen los elementos. Si se trata de un conjunto I, de un solo elemento, u, se puede escribir $I = \{u\}$.

El conjunto de elementos (indeterminados o variables), x, que satisfacen una determinada relación o condición R(x), se denota: $\{x : R(x)\}$. Así, por ejemplo, teniendo en cuenta que siempre se obtiene un número natural al dividir por 2 un número natural par, tendremos $P = \{x : \frac{x}{2} \in N\}$.

Un subconjunto S de un conjunto C es un conjunto tal que todo elemento que pertenece a S pertenece también a C. El hecho de ser un conjunto S subconjunto de otro conjunto C se representa simbólicamente así: $S \subset C$, y se lee "S está incluído (o contenido) en C". También puede escribirse entonces $C \supset S$, que se lee "C contiene a S". Para indicar que un conjunto T no es subconjunto de (o sea, no está incluído en) otro conjunto C, se escribe $T \not\subset C$, que se lee "T no está incluído (o no está contenido) en C"; asimismo puede escribirse también entonces $C \not\supset T$, que se lee "C no contiene a T".

Para designar simbólicamente al conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto C -llamados también partes de C- se escribe $\mathcal{P}(C)$.

Si los elementos de un conjunto son, a su vez, conjuntos, formados por elementos, como ocurre normalmente en el indicado caso del conjunto formado por todos los subconjuntos (o partes) de un conjunto C, al indicado conjunto de conjuntos se le llama también familia de conjuntos.

3. Unión e intersección.

Sean X e Y dos partes cualesquiera de un conjunto C: el conjunto formado por los elementos que pertenecen a X o a Y (incluídos los que pertenecen a X y a Y) se llama unión de X e Y y se representa simbólicamente así: $X \cup Y$; el conjunto formado por los elementos que pertenecen a la vez a X y a Y se llama interseoción de X e Y y se designa de esta manera: $X \cap Y$.

Los conceptos de unión e intersección pueden extenderse a tres o más conjuntos: así, por ejemplo, $A \cup B \cup C$ significa el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno, por lo menos, de los conjuntos A, B y C, mientras que $A \cap B \cap C$ significa el conjunto de elementos pertenecientes a A, a B y a C a la vez.

4. Conjunto vacío y conjunto universal.

Si consideramos, por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares, al que he llamado P, y el conjunto de los números naturales impares, al que llamaré I (subconjuntos ambos del N, formado por todos los números naturales), tendremos que su intersección no contiene ningún elemento: este hecho se designa simbólicamente así: $P \cap I = \emptyset$; el símbolo $\emptyset$ representa al llamado conjunto vacío (o conjunto nulo), o sea al conjunto que, como he dicho ya, no contiene ningún elemento. El conjunto $P \cap I$ debería estar constituído, de acuerdo con lo que he expuesto antes, por números naturales que fueran a la vez pares e impares, y no existe ningún número natural par, por ejemplo, que cumpla, además, con la condición de ser impar. Fiján donos ahora en el conjunto que he designado con la letra J, es vacío también el subconjunto del mismo formado por los Jueces españoles de primera instancia que no son Licenciados en Derecho. En general, obten dremos el conjunto vacío al tratar de formar un sub conjunto de otro pretendiendo que todos los elementos de tal subconjunto estén dotados de propiedades que se excluyan entre sí.

Si X e Y son dos subconjuntos de un conjunto C y se verifica $X \cap Y = \emptyset$ se dice que X e Y son disjuntos.

Si, con elementos de un conjunto dado, C, trata mos de formar un subconjunto de C, escogiendo para ello todos los elementos que estén dotados de una propiedad que necesariamente deban poseer todos los elementos de C -por ejemplo, en el indicado conjunto J, la de ser los citados Jueces españoles de primera instancia Licenciados en Derecho-, obtendremos el con junto primitivo, o *conjunto universal (o total), o espacio.*

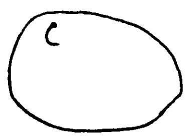
5. Conjuntos complementarios.

Sea S, por ejemplo, un subconjunto de un conjunto C, que está formado, como hemos visto, por todos los elementos de C que pertenecen a S. Todos los elementos de C que no pertenecen a S forman otro conjunto, que se llama *complementario* de S y suele designarse de diversas maneras, de las que entiendo que la más apropiada para el presente trabajo es $\bar{S}$. Con relación al conjunto total, C, también nos va a ser útil designar al conjunto $\bar{S}$ en la forma usual: C-S. Naturalmente, el complementario del conjunto vacío (que se conviene que está contenido en cualquier conjunto) es el conjunto total y el complementario de éste es el conjunto vacío. Así, por ejemplo, en el conjunto J que venimos considerando, el complementario del subconjunto formado por los Jueces de primera instancia en servicio activo en España en la actualidad mayores de 60 años está constituído por los

Jueces de primera instancia en servicio activo, también en España en la actualidad, cuya edad sea de 60 o menos años, y el complementario del subconjunto formado por los elementos del indicado conjunto J que sean Licenciados en Derecho (que, en realidad, es el mismo conjunto J) es el conjunto vacío, $\emptyset$.

6. Diagramas de Venn.

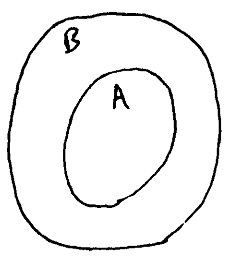
Los diagramas de Venn son unos esquemas, dibujados en un plano, en los cuales los conjuntos están representados por regiones de este mismo plano delimitadas por líneas cerradas, o sea que un conjunto C puede venir representado así:



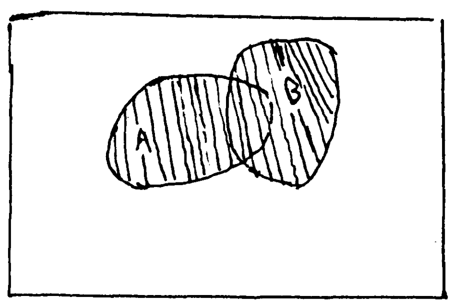
Los elementos de un conjunto representado por este procedimiento vienen entonces representados por puntos de la región del plano interior a la línea cerrada que utilizamos para delimitar la representación gráfica del conjunto a que tales elementos pertenecen.

Para representar al conjunto universal suele utilizarse un rectángulo u otra figura cerrada, que, naturalmente, contenga completamente la representación gráfica de los subconjuntos que consideremos de tal conjunto universal.

Mediante los diagramas de Venn pueden expresarse gráficamente, con facilidad, los conceptos expuestos de inclusión, unión, etc. entre conjuntos. Así, por ejemplo:

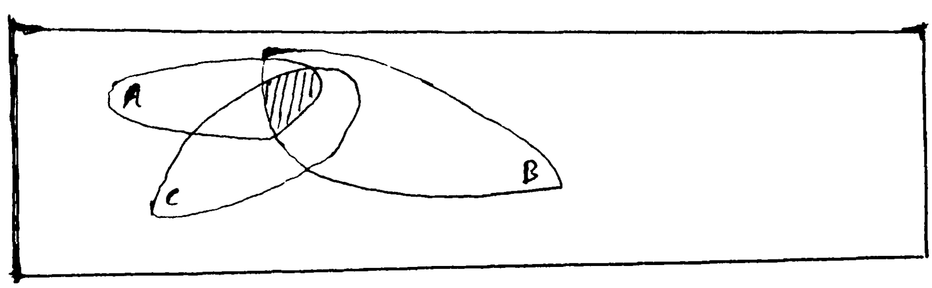


Inclusión: $A \subset B$



Unión: $A \cup B$

(la región rayada)



Intersección: $A \cap B \cap C$

(la región rayada)

7. Los cuantificadores.

Es corriente tener que expresar, en forma simbólica, no ya que un elemento está dotado de un determinado atributo A (o sea que tal elemento pertenece al conjunto formado por todos los elementos dotados de dicho atributo A), sino que existe algún elemento, x, dotado del atributo A. Suele darse con frecuencia, asimismo, el caso de que lo que nos interesa es expresar que existe algún elemento, y, perteneciente a un conjunto E, dado, que, además, está dotado de un determinado atributo. En los indicados casos, para expresar simbólicamente la existencia de tales elementos x e y, se escribe, respectivamente, $\exists x$, que se lee "existe un elemento x" y $\exists y \in E$, que se lee "existe un elemento y de E" (o "existe un elemento y, perteneciente al conjunto E"). El símbolo $\exists$ recibe el nombre de cuantificador existencial.

Si lo que se quiere es destacar la existencia de un solo elemento, z, por ejemplo, que está dotado de un determinado atributo, se escribe $\exists^{*} z$, que se lee "existe un solo elemento z".

En otras ocasiones de lo que se trata es de expresar simbólicamente que no existe ningún elemento, de los que estemos considerando, que esté dotado de un determinado atributo. Para ello se antepone el símbolo $\neg$ (que corresponde a la negación) al cuantificador universal, o sea, se escribe, por ejemplo, $\neg\exists x$, que se lee "no existe ningún elemento x".

Utilizando los símbolos $\neg$ y $\exists$ podemos expresar simbólicamente, asimismo, que, entre los elementos que estamos considerando, no existe ninguno que no esté dotado de un determinado atributo A, o sea que todos los elementos que estamos considerando están dotados del atributo A. Así, refiriéndonos al conjunto que he denominado "conjunto J" en el capítulo anterior, son equivalentes las expresiones "no existe ningún elemento x, perteneciente al conjunto J, que no sea Licenciado en Derecho" y "todos los elementos x, pertenecientes al conjunto J, son Licenciados en Derecho" (o bien, como suele escribirse para una mejor adaptación a nuestro lenguaje simbólico, "para todo elemento x, perteneciente al conjunto J, se verifica que x es Licenciado en Derecho"). No obstante, a pesar de que, como he indicado, sin recurrir a más cuantificador que al existencial (y utilizando, además, un símbolo que corresponda a la negación del mismo) podemos expresar simbólicamente (aunque sea en forma indirecta), por ejemplo, la última frase entrecomillada, resulta más cómoda, en este caso y en otros análogos, la utilización de otro cuantificador, llamado <u>cuantificador universal</u>; como tal cuantificador universal se utiliza el símbolo $\forall$ y entonces, por ejemplo, $\forall x$ significa "para todo elemento x".

\- \- \-

CAPITULO II.- EL CONCEPTO DE ESTRUCTURA Y LAS ESTRUCTURAS BASICAS DEL PENSAMIENTO LOGICO-MATEMATICO.

1. El concepto de estructura.

Como dice acertadamente Lucienne Félix, un conjunto "se convierte en objeto matemático si está organizado de acuerdo con algún principio de clasificación o de asociación: se dice que ese conjunto está estructurado... Así, una sociedad está estructurada según la definición de clases sociales, o según consideraciones de edades" (1).

Ese "conjunto estructurado" -o "dotado de una estructura", como también suele decirse- al que se refiere Lucienne Félix es, en realidad, un ente constituído por dos componentes: el propio conjunto y la estructura de que está dotado. Teniendo en cuenta esta circunstancia, y de acuerdo con lo que ya he

1) Lucienne Félix, Matemática moderna. Traducción española de Eduardo V. Hombría y Atilio Piana, Buenos Aires, 1968, pág. 41.

indicado en la introducción al presente estudio, he expuesto en el primer capítulo del mismo unos conceptos fundamentales sobre teoría de conjuntos con ánimo de ir desarrollando luego en este una breve iniciación en los que se refieren a estructura, en general, y a estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático, en particular, sin perjuicio de seguir ampliando y formalizando los indicados conceptos -referentes a teoría de conjuntos y a estructuras- en capítulos sucesivos.

Sobre el concepto de estructura, como componente de un conjunto estructurado, en general, y como "primera aproximación" a tal concepto, entiendo que se adapta a la naturaleza del presente trabajo el párrafo de Piaget que a continuación transcribo:

"En primera aproximación, una estructura es un sistema de transformaciones, que lleva consigo leyes como tal sistema (o sea, en contraposición a las propiedades de los elementos) y que se conserva o se enriquece mediante el propio funcionamiento regular de sus transformaciones, sin que éstas traspasen sus fronteras y sin recurrir tampoco a elementos exterio res. En una palabra, una estructura comprende así los tres caracteres de totalidad, de transformaciones y de autorregulación" (1).

Naturalmente, lo que Piaget denomina, en el párrafo que acabo de transcribir, "las propiedades de los elementos" son precisamente las propiedades de los elementos del conjunto dotado de la estructura de que se trate, y lo que el citado autor denomina, en el indicado párrafo, "fronteras" son las fronteras de dicho conjunto estructurado.

Con relación a esos "tres caracteres de totalidad, de transformaciones y de autorregulación", por otra parte, entiendo que nos va a ser útil aclarar y ampliar, mediante unas breves consideraciones, lo que expone Piaget en su transcrito párrafo, pero antes voy a transcribir también el párrafo del mismo autor que sigue inmediatamente al ya transcrito y cuya conexión con los objetivos que persigo en el presente estudio resulta, a mi modo de ver, evidente.

---

1) Piaget, Le structuralisme, París, 1968 (4º trimestre), págs. 6 y 7.

Ese párrafo de Piaget cuya transcripción he anunciado últimamente dice así:

"En segunda aproximación, pero pudiendo tratarse tanto de una fase muy posterior como de la que suceda inmediatamente al descubrimiento de la estructura, ésta debe poder dar lugar a una formalización. Sólo que es preciso comprender bien que esta formalización es obra del teórico, en tanto que la estructura es independiente de él, y que esta formalización puede traducirse inmediatamente en ecuaciones lógico-matemáticas o realizarse por medio de un modelo cibernético. Existen así distintos niveles posibles de formalización que dependen de las decisiones del teórico, mientras que al modo de existencia de la estructura que él descubre hay que precisarlo en cada dominio particular de investigaciones" (1).

Volviendo ahora a "los tres caracteres de totalidad, de transformaciones y de autorregulación", voy a exponer brevemente, a continuación, algunas ideas sobre cada uno de ellos en particular:

---

1) Piaget, Le structuralisme, ed. cit., pág. 7.

a) La totalidad:

Al estar dotado un conjunto, C, de una estructura, los elementos de tal conjunto C no son independientes entre sí, sino que están ligados por las leyes, condiciones o propiedades que caracterizan a dicha estructura, las cuales afectan a todos y cada uno de los elementos del mencionado conjunto C; este hecho implica asimismo que si, mediante la aplicación de las mencionadas leyes, condiciones o propiedades, quedan definidos, por ejemplo, en total, n subconjuntos, C_1, $C_2 \ldots C_n$, del conjunto dado, C, se verifica siempre $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n = C$. Así, podemos considerar el caso de una sociedad integrada por unos determinados individuos y "estructurada según la definición de clases sociales", como dice Lucienne Félix, en cuya sociedad dicha "definición de clases sociales" afecta a todos los individuos que la integran y cada uno de tales individuos pertenece a una de las clases sociales que se han definido; cada una de estas clases sociales determina entonces, por otra parte, un subconjunto del conjunto S formado por todos los individuos que integran la sociedad a la que me estoy refiriendo y, si suponemos que las clases sociales que consideramos son, en total, n y llamamos, respectivamente, S_1, $S_2 \ldots S_n$ a los subconjuntos de S que cada una de ellas determina, tendremos $S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_n = S$.

b) Las transformaciones:

Aplicando las leyes, condiciones o propiedades que caracterizan a una estructura -o efectuando las "operaciones" que tales leyes, condiciones o propiedades regulan- se pueden "transformar" los elementos del conjunto dotado de la estructura que se considere, en el sentido de "pasar" de unos a otros de dichos elementos. Así, en el ejemplo al que vengo aludiendo de "una sociedad estructurada según la definición de clases sociales", se puede "pasar" de una clase social a otra, o de un individuo perteneciente a una clase social a un individuo perteneciente a otra, "ascendiendo" o "descendiendo" en la llamada "escala social". En otros casos se obtiene (o se "pasa" a) un elemento, e, de un concreto conjunto estructurado, C, relacionando, de acuerdo con las leyes, condiciones o propiedades de la estructura de que es té dotado el conjunto C, elementos de este mismo con junto -que pueden, en general, ser distintos o no en tre sí, y distintos o no, a su vez, cada uno de ellos, del e-. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se multipli can, en la forma corriente, dos elementos -distintos o no entre sí- del conjunto N formado por todos los números naturales: entonces lo que se obtiene es otro número natural que puede ser, a su vez, distinto o no de cada uno de los que se han multiplicado.

c) La autorregulación:

Esas transformaciones propias de un conjun to estructurado, C, son siempre "transformaciones in ternas" con relación al mismo, o sea que, aplicando las leyes, condiciones o propiedades que caracterizan a la estructura de que está dotado el conjunto C -o efectuando las operaciones que tales leyes, condicio nes o propiedades regulan-, siempre obtenemos, a par tir de elementos del conjunto C, otros elementos del mismo conjunto C. Por otra parte, las indicadas leyes, condiciones o propiedades deben ser suficientes para regular por completo todas las transformaciones inhe rentes a dicho conjunto estructurado.

En un apartado que denomina precisamente "La autorregulación" dice Piaget lo siguiente:

"El tercer carácter fundamental de las estructuras consiste en que se regulan por sí mismas, llevando consigo esta autorregulación su propia conservación y un cierto cierre. Empezando por estas dos resultantes, ellas significan que las transformaciones inherentes a una estructura no conducen más allá de sus fronteras, sino que sólo engendran elementos que pertenecen siempre a la estructura y que siguen rigiéndose por sus leyes. Así, sumando o restando en tre sí dos números enteros cualesquiera se obtienen siempre números también enteros, y que verifican las leyes del "grupo aditivo" de estos números. En este sentido la estructura vuelve a cerrarse en sí misma, pero este cierre no significa en modo alguno que la estructura considerada no pueda integrarse como subestructura en una estructura más grande. Sólo que es ta modificación de las fronteras generales no anula las primeras: no hay anexión, sino confederación, y las leyes de la subestructura no resultan alteradas sino conservadas, de tal modo que el cambio acaecido es un enriquecimiento".

"Esos caracteres de conservación con estabilidad de las fronteras... suponen, por consiguiente, una autorregulación de las estructuras, y esta propiedad esencial refuerza sin duda alguna la importancia de la noción y las esperanzas que ésta suscita en todos los dominios, pues cuando se logra reducir un determinado campo de conocimientos a una estructura autorreguladora se tiene la impresión de que se está entrando en posesión del motor íntimo del sistema..." (1).

Estoy de acuerdo, en líneas generales, con las ideas que manifiesta Piaget en las frases que acabo de transcribir, con la salvedad, sin embargo, de que entiendo que cuando el mencionado autor dice en ellas "estructura" se refiere a "conjunto estructurado" (y, asimismo, al decir "subestructura" a "subcon

---

1) Piaget, Le structuralisme, ed. cit., págs. 13 y 14.

junto estructurado" y al decir "una estructura autorreguladora" a "un conjunto dotado de una estructura autorreguladora").

2. Las estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático.

Con el nombre de "estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático" designo aquí a unas estructuras, pertenecientes a tres determinados tipos cuyos caracteres se irán exponiendo, que han sido llamadas también, en Matemáticas y en Lógica, "estructuras madres" o "estructuras matrices" (1) y sobre el "descubrimiento" de las cuales por parte de Bourbaki dice Piaget lo siguiente:

---

1) Pueden verse, en este sentido, las obras ya citadas de Piaget y, particularmente, la del indicado autor y Beth "Epistemologie mathématique et psychologie. Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée reelle". Esta obra, traducida al español por Víctor Sánchez de Zavala, ha sido publicada, con el título "Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real", por Edito-

"...el método de los Bourbaki consistió en deducir, mediante la utilización del concepto de isomorfismo, las estructuras más generales a que pueden someterse elementos matemáticos sean del tipo que sean, cualquiera que sea el dominio en el que se los tome, y haciendo abstracción en absoluto de su naturaleza particular".

"El punto de partida de tal empresa consistió, pues, en una modalidad de inducción, ya que ni el número ni la forma de las estructuras fundamentales que se buscaban habían sido deducidos "a priori". Este método condujo al descubrimiento de tres "estructuras madres", es decir fuentes de todas las demás, pero conceptuadas como irreductibles entre sí (resultando, por consiguiente, este número de tres de un análisis regresivo y no de una construcción apriorística)..." (1).

---

rial Ciencia Nueva, en Madrid, en 1968. A esta edición de Editorial Ciencia Nueva me referiré en citas sucesivas.

1) Piaget, Le structuralisme, ed. cit., págs. 21 y 22. Puede verse, asimismo, en relación con el indicado "descubrimiento" de Bourbaki, el trabajo

Estas estructuras a las que me vengo refiriendo corresponden, así, a los tres tipos siguientes:

a) Estructuras de orden, que se derivan de los conceptos corrientes de "orden" u "ordenamiento", en sentidos, por ejemplo, temporal (un elemento, con relación a otro, puede ser anterior, simultáneo o posterior), referente al volumen (entonces un elemento, con relación a otro, puede ser menor, igual o mayor), etc. Se trata, pues, de establecer "comparaciones" entre un elemento de un conjunto, C, dotado de una estructura de orden, y otro elemento del mismo conjunto C, aunque puede darse el caso -como veremos con más detalle en el capítulo siguiente- de que, estando dotado un conjunto C de una determinada estructura de orden, existan pares de elementos tales que, perteneciendo al conjunto C los dos elementos que componen uno cualquiera de los mencionados pares, sean

---

del propio Bourbaki "La arquitectura de las matemáticas", publicado, en traducción castellana, en "Las grandes corrientes del pensamiento matemático", Eudeba, Buenos Aires, 1948, págs. 36 a 49.

esos dos elementos, de acuerdo con las leyes, condiciones o propiedades que caractericen a la estructura de orden últimamente mencionada, "incomparables" entre sí.

b) Estructuras algebraicas, cuyo prototipo es el grupo, caracterizado ante todo por el hecho de que, si están dados un conjunto, C, y dos elementos de C, cualesquiera, a y b (en este orden), queda determinado unívocamente un elemento, c, del mismo conjunto C, en virtud de una operación, *, mediante la que se relacionan los elementos a y b; esto se indica, simbólicamente, así: $a*b=c$; esta operación * satisface, además, a las siguientes propiedades que constituyen el conjunto de los axiomas del grupo definido por la misma: 1ª. Es asociativa, o sea que, si los elementos a, b y d pertenecen al conjunto C, $(a*b)*d=a*(b*d)$, siendo $(a*b)$ y $(b*d)$ los elementos del mismo conjunto C obtenidos al relacionar, mediante la operación *, los elementos a y b y los elementos b y d, respectivamente.- 2ª. Existe un único elemento, n, llamado "elemento neutro", perteneciente al conjunto C y tal que, para todo elemento e del mismo conjunto C, $e*n=n*e=e$.- 3ª. A cada elemento e de dicho conjunto C le corresponde un elemento e', único, perteneciente al conjunto C y tal que e*e'=e'*e=n (al elemento e' puede llamársele "recíproco" del e). Las propiedades de la operación que define a una estructura algebraica pueden -con relación a las indicadas, que corresponden concretamente a la estructura de grupo- ampliarse o reducirse; así, por ejemplo, si la operación *, además de satisfacer a las propiedades que corresponden a la estructura de grupo, es <u>conmutativa</u> (o sea que, dados dos elementos cualesquiera, a y b, del conjunto C, siempre se verifica a*b=b*a), el conjunto C está dotado de una estructura de <u>grupo abeliano (o conmutativo)</u>; un ejemplo de conjunto dotado de una estructura de grupo abeliano lo constituye el conjunto de los números enteros tomando como operación * la operación ordinaria de sumar: entonces el elemento neutro es el cero y son recíprocos -en este caso se dice "opuestos"- entre sí los números de igual valor absoluto y distinto signo (por ejemplo 5 y -5). Un conjunto C, en cambio, queda dotado, por ejemplo, de una estructura de <u>semigrupo asociativo</u> si se eliminan, de entre las propiedades que, según he indicado, corresponden a la estructura de grupo, las que he enumerado en último y penúl timo lugar. Por otra parte, puede ocurrir también que, siendo, por ejemplo, h y k elementos de un conjunto C y * la operación que define una estructura algebraica, sea h*k un elemento del conjunto C, pero, sustituyendo uno, por lo menos, de los elementos h y k en la expresión h*k por otro determinado elemento del conjunto C, no se obtenga, sin embargo, ningún elemento de C; la operación * recibe entonces el nombre de "operación parcial".

c) Finalmente, las estructuras topológicas, de fundamental importancia en Matemáticas, se derivan de las ideas intuitivas de "proximidad" y de "continuidad".

Una vez definidas esas estructuras fundamentales o básicas del pensamiento lógico-matemático lo que cabe, "por ahora", como dice Piaget tras haber señalado que "Bourbaki tiene... mucho cuidado de puntualizar que el número de estructuras fundamentales actualmente conocidas no tiene nada de definitivo", es, según indica el propio Piaget, "derivar de estas tres estructuras matrices todas las demás, por diferenciación o por combinación. Aquélla consiste en limitar la generalidad de las estructuras matrices "enriqueciéndolas con axiomas adicionales, cada uno de los cuales aportará su cosecha de nuevas consecuencias" (1); y la combinación consiste en construir estructuras (a las que se puede denominar "múltiples") por interferencia de dos estructuras matrices, si bien no yuxtapuestas, sino ajustadas orgánicamente mediante uno o varios axiomas que las enlacen: por ejemplo, el álgebra topológica y la topología algébrica " (2).

Las analogías existentes entre las "estructuras matrices" a las que me vengo refiriendo y las llamadas "estructuras mentales" son indiscutibles y han sido profusamente estudiadas en estos últimos años; con relación a los indicados estudios pueden verse, por ejemplo, las obras de Piaget que he ido

---

1) Esta cita es de Bourbaki, La arquitectura de las matemáticas, en "Las grandes corrientes del pensamiento matemático", traducción y edición citadas, pág. 45.

2) Piaget y Beth, obra y traducción citadas, págs. 205 y 206.

citando y, de entre ellas, particularmente, la del indicado autor en colaboración con Beth sobre relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real. En esa obra, y en la iniciación de un magistral análisis sobre las indicadas analogías, dice Piaget lo siguiente:

"...cuando hicimos el intento de extraer los tipos principales de las estructuras operatorias mentales ignorábamos absolutamente todo acerca de las estructuras matrices de Bourbaki: en 1952 tuvo lugar en Melun, cerca de París, un pequeño coloquio sobre las "estructuras matemáticas y estructuras mentales", coloquio que se inició con dos charlas, una de J. Dieudonné, sobre las estructuras bourbakistas, y la siguiente, nuestra, sobre las estructuras mentales; pues bien, sin conocer en aquel entonces la obra de Bourbaki, habíamos encontrado precisamente, simplemente tratando de clasificar las distintas estructuras operatorias observadas empíricamente en el desarrollo de la inteligencia del niño, tres tipos de estructuras irreductibles entre sí en su punto de origen, pero que se combinaban luego de diversas formas;

y estas estructuras eran: aquellas cuya forma de reversibilidad es la inversión o anulación (A-A=0), y que cabe describir por referencia a modelos algebraicos o de grupo; las que tienen una forma de reversibilidad que consiste en la reciprocidad, que han de describirse apoyándose en estructuras de orden, y las estructuras a base de lo continuo, en particular, las estructuras espaciales, que poseen el notable carácter de que sus formas elementales son de índole topológica antes de llegar a las construcciones métricas y proyectivas. Aquella convergencia entre las dos charlas iniciales, que eran enteramente independientes, sorprendió a los miembros del coloquio, empezando por los mismos autores (acerca de los cuales, si está permitido, podría decirse que el primero se distingue por su ignorancia voluntaria de la psicología, y el segundo, por su ignorancia involuntaria de las matemáticas...)" (1).

---

1) Piaget y Beth, obra y traducción citadas, págs. 209 y 210.

Por lo que se refiere al orden que he seguido en la enumeración de los tres tipos de estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático -orden que seguiré, asimismo, en la exposición y desarrollo de conceptos referentes a estas mismas estructuras en los siguientes capítulos del presente trabajo-, cabe la posible objeción de que tal orden no se adapta ni al que sigue Piaget al hablar de "las distintas estructuras operatorias observadas empíricamente en el desarrollo de la inteligencia del niño", ni al orden cronológico en que ha venido iniciándose el estudio de cada uno de tales tipos de estructuras a través de la historia, ni siquiera al relativo orden de importancia de cada uno de esos mismos tipos de estructuras, en general. Entiendo, no obstante, que el orden que sigo en este trabajo en la exposición y desarrollo de los conceptos referentes a los tres indicados tipos de estructuras sí se adapta al relativo orden de importancia de cada uno de esos tipos de estructuras en sus específicas relaciones con el Derecho. Por otra parte, este orden que, en la exposición y desarrollo indicados, sigo en el presente trabajo es asimismo corriente en los actuales textos de la llamada "matemática moderna".

C A P I T U L O   I I I

ESTRUCTURAS DE ORDEN

1. Relaciones de equivalencia.

Estas relaciones se dan cuando, desde cierto punto de vista, algunos elementos de un conjunto, C, son intercambiables. En el lenguaje corriente esto se expresa diciendo que tales elementos tienen el mismo valor, el mismo color, el mismo sexo, el mismo derecho a gozar de unos determinados privilegios o beneficios, la misma nacionalidad, etc.

Siendo C un conjunto dado, una relación binaria (relación entre dos elementos del conjunto, distintos o no entre sí) suele representarse por R, y el hecho de que dos elementos del conjunto C, a los que designaré por a y b, estén ligados por la relación R se expresa simbólicamente así: aRb, o bien R(a,b). La relación R, definida entre elementos de un conjunto C, es una relación de equivalencia si posee las tres propiedades siguientes:

1ª.- <u>Reflexiva</u>: Para todo $a \in C$, se verifica aRa.

2ª.- <u>Simétrica</u>: Si se verifica $a \in C$, $b \in C$ y aRb, también se verifica bRa.

3ª.- <u>Transitiva</u>: Si se verifica $a \in C$, $b \in C$, $c \in C$, aRb y bRc, también se verifica aRc.

Para designar las relaciones de equivalencia, en vez de la letra R, se suele usar el símbolo $\equiv$ o el $\sim$.

En general, para indicar que dos elementos, a y d, por ejemplo, de un conjunto C, no están ligados por una relación R, se escribe $a \not R d$, y, para indicar concretamente que dos elementos a y d, de un conjunto C, no están ligados por una relación de equivalencia que se esté considerando, se suele escribir $a \not\equiv d$, o bien $a \nsim d$.

Una relación de equivalencia constituye un principio de clasificación: se consideran como pertenecientes a una misma <u>clase de equivalencia</u> todos los elementos equivalentes entre sí. Un elemento cualquiera de una clase de equivalencia puede llamarse <u>representante</u> de dicha clase.

Si, dado un conjunto C, designamos por $X \in \mathcal{P}(C)$, $Y \in \mathcal{P}(C)$ y $Z \in \mathcal{P}(C)$ a las clases de equivalencia definidas por elementos $x \in C$, $y \in C$ y $z \in C$, respectivamente, de las tres propiedades que definen la relación de equivalencia puede deducirse, por ejemplo, que:

$$y \equiv x \Longrightarrow X = Y$$
$$z \not\equiv x \Longrightarrow X \cap Z = \emptyset.$$

Así, pues, todo elemento de C está en una clase y las clases son disjuntas. Estas clases constituyen una <u>partición</u> de C.

Inversamente, toda partición de un conjunto C, es decir, toda descomposición de C en clases disjuntas, define una relación de equivalencia: $a \equiv b$ significa ahora que a y b pertenecen a la misma clase; se verifican inmediatamente las tres condiciones o propiedades de definición.

Definida una relación de equivalencia R en un conjunto C, se denomina <u>conjunto cociente de C por</u>

la relación R a la partición que R determina en C, considerada como subconjunto de $\mathcal{P}(C)$. El indicado "conjunto cociente" se designa mediante la notación C/R.

En algunos casos se utiliza la expresión "congruencia módulo R" para designar la equivalencia con respecto a la relación R; entonces, si R simboliza la relación de que se trata, se escribe también, en vez de xRy o R(x,y), $x \equiv y$ (mod. R), que se lee "x equivalente a y, módulo R (o según R)". El conjunto cociente C/R puede definirse así como el conjunto de las clases de equivalencia, módulo R, de los elementos de C.

Por el interés que pueden tener, al irse extendiendo la aplicación al campo jurídico de los conceptos que he expuesto sobre relaciones de equivalencia, reproduzco a continuación unas frases de Lucienne Félix sobre las condiciones o propiedades de tales relaciones de equivalencia, con vistas a las aplicaciones prácticas de las mismas:

"Estas condiciones" -dice Lucienne Félix- "son tan cómodas que, para asegurarlas, se adaptan, si es posible, las definiciones. La relación "ser hermana de" es una relación de equivalencia en un conjunto de niñas si se la define como "tener los mismos padres", pues entonces cada una de las niñas es hermana de sí misma" (1).

2. Conjuntos ordenados.

Se dice que una relación, R, entre dos elementos de un conjunto, C, es una relación de orden (o, simplemente, un orden) en C si posee las tres propiedades siguientes:

1ª.- Reflexiva: Para todo elemento, a, de C, se verifica aRa.

2ª.- Antisimétrica: aRb y bRa implica a=b, siendo a y b elementos cualesquiera de C.

3ª.- Transitiva: aRb y bRc implica aRc, siendo a, b y c elementos cualesquiera de C.

1) Lucienne Félix, obra y traducción citadas, pág.42.

Un conjunto en el que se considera la rela ción que acabo de definir suele llamarse conjunto parcialmente ordenado (y la relación se llama entonces relación de orden parcial), diciéndose que un conjunto, C, está totalmente ordenado (o linealmente ordenado) por una relación de orden, R, si, además de verificarse las tres propiedades o condiciones in dicadas (reflexiva, antisimétrica y transitiva), para todo par, a,b, de elementos de C se cumple aRb o bRa. Esta última relación se denomina relación de orden total o lineal.

Un ejemplo de relación de orden total es la relación ≤ (menor o igual) en el conjunto, N, de los números naturales, ya que, en tal caso, puede compro barse fácilmente que se cumplen las tres propiedades dadas (reflexiva, antisimétrica y transitiva) y, ade más, entre dos números naturales cualesquiera siempre ocurrirá que, o bien uno de ellos es menor que el otro, o bien son los dos iguales entre sí (cuando lo que se hace es relacionar un número natural consigo mismo).

Entre los mismos números naturales un ejem plo de relación de orden parcial se obtiene al suponer que R significa "es divisor de": entonces se dan las tres propiedades:

1ª.- aRa (todo número natural es divisor de sí mismo).

2ª.- aRb y bRa implica a=b (para que, siendo a y b números naturales, a sea divisor de b y b sea divisor de a, tiene que ser a=b).

3ª.- aRb y bRc implica aRc (siendo a,b y c números naturales, si a es divisor de b y b es divisor de c, a es divisor de c).

Sin embargo, es muy fácil encontrar un par de números naturales tal que ninguno de los dos números que lo integran es divisor del otro. Así, por ejemplo, en el par formado por los números 5 y 6, ni 5 es divisor de 6 ni 6 es divisor de 5.

Otros ejemplos de relaciones de orden parcial pueden deducirse de las distintas escalas mediante las cuales se gradúan las penas en nuestro Código Penal. Así, fijándonos en las que en los artículos

27, 28 y 30 del indicado Código se enumeran como penas leves (arresto menor, reprensión privada y multa de menos de 10.000 pesetas impuesta "como pena principal única"), por ejemplo, usando el mismo símbolo $\leq$ que cuando se trataba de ordenar números naturales y la letra p con subíndices para indicar penas, podemos escribir:

1º.- $p_1 \leq p_1$.

2º.- $p_1 \leq p_2$ y $p_2 \leq p_1$ implica $p_1 = p_2$.

3º.- $p_1 \leq p_2$ y $p_2 \leq p_3$ implica $p_1 \leq p_3$.

En el conjunto ordenado de penas leves que estamos considerando resulta fácil, no obstante, encontrar algún par de penas que no estén relacionadas entre sí. Uno de tales pares podemos obtenerlo teniendo en cuenta que ni de los artículos 30 y 28 del mencionado Código (según los cuales la duración de la pena de arresto menor será de uno a treinta días, y la multa, de acuerdo con la modificación introducida en el citado artículo 28 por Ley de 28 de noviembre de 1974, se reputará como pena leve cuando no llegare a 10.000 pesetas) ni de ningún otro artículo de nuestro Código Penal puede deducirse cuál es menor, por ejemplo, entre una pena de quince días de arresto y una multa de 5.000 pesetas, impuesta "como pena principal única", como dice el indicado artículo 28 (ni si estas dos penas son o no son iguales entre sí).

En el campo jurídico, sin embargo, entiendo que mayor trascendencia que la que tenga este sencillo ejemplo, u otros similares que podrían deducirse fácilmente de nuestra legislación, debe tener la aplicación del concepto de relación de orden parcial para la consideración de distintas concepciones de la noción de justicia en la labor legislativa y en el ejercicio de la actividad jurisdiccional. Entre los muchos ejemplos que podría citar aquí, concernientes a esa aplicación del concepto de relación de orden parcial que acabo de mencionar, he escogido el que desarrollo a continuación, inspirado en unas ideas que expone Perelman en su obra "De la justicia" (1):

Así, tras afirmar el indicado autor que "es

---

1) Perelman, De la justicia. Traducción española de Ricardo Guerra, México, 1964.

ilusorio querer enumerar todos los sentidos posibles de la noción de justicia", da "sin embargo algunos ejemplos que constituyen las concepciones más corrientes de la justicia" (1). Esas concepciones, cuyo "carácter irreconciliable" pasa posteriormente a destacar Perelman, son, según dicho autor, las seis siguientes:

"1. A cada quien la misma cosa.
2. A cada quien según sus méritos.
3. A cada quien según sus obras.
4. A cada quien según sus necesidades.
5. A cada quien según su rango.
6. A cada quien según lo que la ley le atribuye" (2).

Más adelante, y refiriéndose concretamente a las concepciones de la justicia a las que ha asignado los números 3 y 4 ("a cada quien según sus obras" y "a cada quien según sus necesidades", respectivamen

---

1) Perelman, obra y traducción citadas, págs. 16 y 17

2) Perelman, obra y traducción citadas, pág. 17.

te), dice Perelman lo siguiente:

"Tomemos un ejemplo concreto de controversia acerca de cuestiones prácticas, presentándolo, para mayor claridad, como una simple aplicación de las fórmulas de justicia concreta".

"Se puede atacar el sistema de los subsidios familiares, suponiendo que se le considere como aplicación de la fórmula "a cada quien según sus necesidades", al encontrar injusto que se tome en cuenta, en la determinación del salario de los obreros, alguna cosa que no sea su rendimiento; es evidente que el partidario de la fórmula "a cada quien según sus obras" dividirá a los obreros de modo distinto a como lo haría aquel que toma en cuenta la fórmula "a cada quien según sus necesidades", lo que le permitirá acusar de injusta a la clasificación determinada por esta última regla de justicia concreta. Pero alguien que encuentre perfectamente justificado el sistema de los subsidios familiares puede encontrar injusto que se otorgue, por ejemplo, para el cuarto hijo, un subsidio diez veces superior al concedido al primero, cuando es el primer niño el que aumenta de manera más sensible los gastos del matrimonio".

"Se ve inmediatamente que esta última crítica es de un orden completamente distinto a la primera, pues se sitúa en el mismo terreno que aquel a quien se dirige, y admite ya una cierta plataforma común: la necesidad de los subsidios para satisfacer las necesidades de la familia..." (1).

Si tomamos en consideración el concepto de relación de orden parcial al que me vengo refiriendo, esa admisión de "una cierta plataforma común" a la que alude Perelman significa la admisión de un conjunto único de retribuciones justas, al que pertenecen tanto las que se asignan en función del rendimiento de cada obrero como las que corresponden a "subsidios para satisfacer necesidades de la familia" del mismo. Prescindiendo ahora, pues, del punto de vista de quien encuentra "injusto que se tome en cuenta, en la determinación del salario de los obreros, alguna otra cosa que no sea su rendimiento", punto de vista que, por otra parte, tiene en la actualidad, en gene

---

1) Perelman, obra y traducción citadas, pág. 64.

ral, poca importancia al "imponerse" -como dice el propio Perelman- "cada vez más en la legislación social contemporánea" la fórmula de la justicia "a cada quien según sus necesidades" (1), tendremos que, en el conjunto formado por las retribuciones a satisfacer a los obreros, podrán ordenarse independientemente las que se derivan del rendimiento o productividad de cada uno de ellos y las que se derivan, como dice Perelman, de "sus cargas familiares, su salud más o menos precaria, los cuidados que exige su infancia o su vejez, etcétera" (2). Así, y mediante la intervención, en la compleja tarea de fijación de las indicadas retribuciones, de sociólogos, economistas y técnicos en las específicas modalidades de producción a considerar, pueden utilizar el legislador y -en el ejercicio de sus delimitadas atribuciones- el juez un conjunto ordenado de retribuciones justas, en cuyo conjunto, sin embargo, existen pares de elementos en los cuales no están relacionados entre sí los dos elementos de que consta cada uno de dichos

---

1) Perelman, obra y traducción citadas, pág. 19.

2) Perelman, obra y traducción citadas, págs. 18 y 19.

pares (aquellos en los que uno sólo de sus elementos es una retribución derivada del rendimiento o productividad), o sea que tenemos aquí un caso de conjunto parcialmente ordenado, análogo, en este sentido, al considerado en el ejemplo anterior.

En general, cuando se considera una relación de orden determinada, R, en un conjunto, C, se dice que C está <u>ordenado</u> por la relación R y que R define en C una <u>estructura de conjunto ordenado</u>, o bien una <u>estructura de orden</u> (o, simplemente, un <u>orden</u>). Se dice entonces, asimismo, que el conjunto C <u>posee</u> (o <u>está dotado de</u>) dicha estructura de orden.

Un elemento, a, de un conjunto, C, ordenado por una relación, R, se llama elemento <u>maximal</u> de C si, para todo $x \in C$, tal que aRx, se tiene x=a. Considerando el mismo conjunto C y la misma relación R, podemos definir un elemento <u>minimal</u>, b: entonces sería, para todo $x \in C$, tal que xRb, x=b.

Un conjunto ordenado puede no tener elementos maximales o minimales y, si los tiene, no son necesariamente únicos, pero se demuestra fácilmente que, si un conjunto, C, está totalmente ordenado y tiene un elemento maximal -o minimal-, entonces tal elemento sí es único.

Un ejemplo típicamente jurídico de conjunto ordenado en el que puede apreciarse claramente la existencia de un elemento maximal lo constituye la llamada "pirámide de Kelsen". Refiriéndose a este mismo ejemplo, y en el desarrollo de un capítulo que titula "La utilización de las estructuras en los estudios sociales", dice Piaget lo siguiente:

"En contraposición con los valores espontáneos, las estructuras sociales que se apoyan en las normas presentan un significativo carácter operatorio en el sentido lógico del término. Todos sabemos de qué manera caracterizó así H. Kelsen la estructura del Derecho como una pirámide de normas, cimentada según una relación general de implicación entre normas a la que él llama la "imputación": en su cúspide se encontraría la "norma fundamental" en la que se funda la legitimidad del todo y en particular de la constitución; de ésta se deduce la validez de las leyes que fundamenta la de los actos de gobierno, o del poder de los tribunales, de donde, a su vez, se deri va el carácter legal de las "órdenes", etc., hasta llegar a la multiplicidad de "normas individualizadas" (sentencias penales, nombramientos individuales, títulos académicos o profesionales, etc.)..." (1).

Aparte de la alusión, de alcance más amplio, a ese "significativo carácter operatorio en el senti do lógico del término", típico de "las estructuras sociales que se apoyan en las normas", sobre el que insistiré en el capítulo del presente trabajo dedica do al álgebra de la lógica, podemos observar en las precedentes palabras de Piaget, en relación directa con las estructuras de orden que venimos considerando, un método de descripción de la llamada "pirámide de Kelsen" mediante el cual se percibe fácilmente tanto el carácter de conjunto ordenado de la indicada "pirámide" como la existencia en dicho conjunto estructurado de un elemento maximal único (que es la "norma fundamental", precisamente), de acuerdo con lo que he dicho ya al iniciar la exposición del pre-

---

1) Piaget, Le structuralisme, ed. cit., pág. 89.

sente ejemplo de conjunto ordenado.

3. Relaciones de preorden.

Dada una relación, R, entre elementos de un conjunto, C, se dice que R es una relación de preorden (o, simplemente, un preorden) en C si posee las propiedades reflexiva y transitiva. Al conjunto C se le llama entonces conjunto C preordenado por R (o con la relación de preorden R).

4. Pares ordenados.

Un par ordenado es un conjunto de dos elementos totalmente ordenado por una relación de orden, R. Si los dos elementos de dicho conjunto son, por ejemplo, a y b (tomados en el indicado orden), es corriente escribir, en el caso que venimos considerando, $\langle a,b\rangle$ en lugar de $\{a,b\}$; naturalmente, será $\langle a,b\rangle \neq \langle b,a\rangle$ siempre que sea $a\neq b$. En general, dados

dos pares ordenados cualesquiera, $\langle a,b\rangle$ y $\langle c,d\rangle$, se verifica $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ si y sólo si a=c y b=d.

En teoría de conjuntos tenemos un ejemplo de par ordenado al considerar un subconjunto S, de un conjunto C, y el propio conjunto C, como componentes del conjunto $\langle S, C\rangle$ ordenado por la relación de inclusión, $\subset$. Intimamente relacionado con el anterior ejemplo, como veremos con mayor atención más adelante, está, en lógica, el ejemplo del conjunto formado por dos proposiciones, p y q, ordenado por la relación de implicación, que suele designarse mediante el signo $\Rightarrow$, o sea, el par ordenado $\langle p,q\rangle$, en el que se verifica $p \Rightarrow q$ (y, naturalmente $p \Rightarrow p$ y $q \Rightarrow q$).

Es corriente, asimismo, utilizar pares ordenados tales que cada uno de ellos esté formado por elementos procedentes de conjuntos distintos entre sí. Un ejemplo de este tipo de pares ordenados que nos va a ser útil en el sucesivo desarrollo del presente trabajo es el par $\langle d,p\rangle$, formado por un delito, d, y la pena que le corresponde, p, siendo aquí de carácter temporal la relación por la que está ordenado el conjunto que se considera, ya que de lo que en esta ocasión se trata es de que ni el cumplimiento de la pena ni siquiera la imposición de la misma pueden ser anteriores a la comisión del delito; así, pues, si designamos por R la mencionada relación, R querrá decir aquí "anterior o simultáneo (o simultánea)".

5. Relaciones de equivalencia y de orden en conjuntos de tres elementos: las triadas.

En un conjunto, C, de tres elementos, a, b y c, pueden definirse, naturalmente, relaciones de equivalencia o de orden (total o parcial). Puede determinarse asimismo un par ordenado cuyos elementos sean dos subconjuntos, C_1 y C_2, de C formados uno de tales subconjuntos por dos elementos y el otro por uno solo, o bien definirse, en el conjunto $\{C_1, C_2\}$, una relación de equivalencia.

Una tríada es, de acuerdo con la definición que da Caplow, "un sistema social formado por tres miembros relacionados entre sí en una situación persistente" (1). "Un sistema social", por otra parte, y también según Caplow, "es aquel cuyos elementos son personas o grupos de personas y cuyas relaciones se establecen a través de interacción social" (2). Desde el punto de vista que nos interesa ahora, una tríada es un conjunto, C, de tres elementos, a, b y c, cada uno de los cuales es una persona o un conjunto formado por personas, verificándose, además, que el citado conjunto C o bien es un conjunto parcialmente ordenado, o está linealmente ordenado, o son equivalentes entre sí sus tres elementos, a, b y c (o sea que dicho conjunto C está constituído por una única clase de equivalencia). Entre los muchos ejemplos del primer caso que podría citar es típico en el campo jurídico el de la tríada formada por el juez y las

---

1) Caplow, Dos contra uno: Teoría de coaliciones en las tríadas. Versión española de Natividad Sánchez Sáinz-Trápaga, Madrid, 1974, pág. 13.

2) Caplow, obra y traducción citadas, pág. 204. En cuanto al concepto de "sistema", en general -y en el sentido que aquí nos interesa-, puede verse el capítulo VIII del presente trabajo.

partes en el juicio civil. Como ejemplos del segundo caso pueden citarse aquí algunas de las llamadas "tríadas jerárquicas", entre las cuales, además de las que enumera Caplow en su mencionada obra -"caudillo-lugarteniente-súbdito, maestro-oficial-aprendiz, o empresario-capataz-trabajador" (1)-, es particularmente significativa en Derecho político y administrativo la tríada "Estado-provincia-municipio". Por último, un ejemplo del tercer caso nos viene dado por el conjunto formado por tres electores, tales que el voto de cada uno de ellos tiene el mismo valor que el voto de cada uno de los demás.

El concepto básico que hay que tener en cuenta para la determinación de las relaciones de orden y de equivalencia en las tríadas es el concepto de poder. "Poder" -en el sentido que ahora nos interesa y de acuerdo con la definición que nos ofrece Caplow- "es la capacidad que tiene un sujeto para modificar la conducta de los demás sujetos con los que interactúa". "Se dice" -afirma a continuación el mis

---

1) Caplow, obra y traducción citadas, pág. 17.

mo autor- "que un sujeto domina a otro en una determinada situación cuando su poder sobre el otro es evidentemente mayor que el del otro sobre él" (1).

Por otra parte, hay que tener también en cuenta normalmente en una tríada su propio proceso evolutivo, consecuencia de las leyes que rigen la dinámica interna de la misma tríada: la tríada suele estar constituída para un determinado fin, para que de ella se derive una situación final -así, en el primero de los ejemplos que he citado antes, el fin del juicio es la sentencia- y en esa situación final puede haber variado la estructura del conjunto C de tres elementos que originariamente era la tríada, pero el conjunto a considerar en tal situación final o será un conjunto ordenado o estará constituído por una única clase de equivalencia. Lo corriente es que o bien a consecuencia de las leyes que rigen la dinámica interna de la tríada persista en ella su estructura original -caso de los ejemplos citados de "tríadas jerárquicas" en los que persiste su estructura de or

---

1) Caplow, obra y traducción citadas, pág. 204.

den total-, o que en la situación final el conjunto C, ordenado originariamente por una relación R, quede ordenado por otra relación R', o que, finalmente, el proceso evolutivo de la tríada conduzca a una situación final en la que la indicada tríada quede reducida a un par ordenado, $\langle C_1, C_2 \rangle$, en el que C_1 y C_2 son dos subconjuntos de C, formados uno de ellos por dos elementos de dicho conjunto C y el otro por el otro elemento del mismo conjunto C. Un caso de cambio de la relación R por otra R' en la forma indicada es el que se produce en el primer ejemplo de tríada que he mencionado -la tríada formada por el juez y las partes en el juicio civil-: al constituirse la citada tríada se da una relación de orden -derivada del concepto de poder- entre el juez y cada una de las partes, relación de orden que no se da en el par formado por esas mismas partes, mientras que una vez dictada la sentencia sí existe entre las partes una relación de orden derivada del concepto de poder -relación de orden que no afecta, por otra parte, al juez-, ya que una de esas partes tiene ahora "capacidad" para "modificar la conducta" de la otra, en el sentido, por ejemplo, de obligarla a entregar una cantidad de dinero o a desalojar una vivienda. Un caso de reducción de la tríada a un par ordenado en la forma expuesta anteriormente puede darse en el último de los ejemplos de tríada citados -el del conjunto, C, formado por tres electores tales que el voto de cada uno de ellos tiene el mismo valor que el voto de cada uno de los otros dos-: si suponemos ahora, para fijar las ideas, que los indicados electores, a, b, y c, constituyen un órgano colegiado, y que de lo que se trata es de manifestar la voluntad de dicho órgano colegiado en un determinado asunto, si dos de los miembros (a y b, por ejemplo) del mencionado órgano colegiado votan en el mismo sentido, pero este sentido es distinto del que corresponde al voto de c, tendremos efectivamente un par $\langle C_1, C_2 \rangle$, en el que $C_1=\{a,b\}$ y $C_2 = \{c\}$, y en el que, además, el elemento C_1 domina -en el sentido de que prevalece su voluntad como voluntad del órgano colegiado- al C_2.

Se dice que el elemento C_1 del par ordenado $\langle C_1, C_2 \rangle$ al que se llega en el último ejemplo que hemos considerado es una "coalición dominante". Con relación a los conceptos de "coalición", en general, "coalición dentro de una tríada" y "coalición dominante" entiendo que pueden ser útiles aquí las siguientes definiciones que nos ofrece Caplow:

"Una coalición es una combinación de dos o más sujetos que adoptan una estrategia común frente a otros sujetos pertenecientes al mismo sistema".

"Una coalición dentro de una tríada es una combinación de dos miembros de dicha tríada frente al tercero".

....

"La formación de una coalición dentro de una tríada divide a ésta en dos compañeros y un oponente".

....

"Una coalición dominante es una coalición que domina a su oponente" (1).

---

1) Caplow, obra y traducción citadas, págs. 204 y 205.

Teniendo en cuenta, además, que, como he dicho antes, y también según Caplow, se dice "que un sujeto <u>domina</u> a otro en una determinada situación cuando su poder sobre el otro es evidentemente mayor que el del otro sobre él", llegamos a la conclusión de que también al quedar reducida la tríada a un par ordenado $\langle C_1, C_2 \rangle$, en la forma expuesta anteriormente, el concepto básico que hay que tener en cuenta para la determinación de la relación de orden en el indicado par $\langle C_1, C_2 \rangle$ es el concepto de poder.

De las relaciones del Derecho con el mencionado concepto de poder y con la regulación del ejercicio del mismo, por otra parte, podemos deducir también ahora el interés que para los juristas debe tener ese análisis de relaciones de equivalencia y de orden en conjuntos de tres elementos que constituye el fundamento del estudio de las tríadas.

\- \- \-

C A P I T U L O IV.- ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

1. Los conceptos de grupo y subgrupo.

De acuerdo con lo que he indicado en el capítulo segundo de este trabajo, se dice que un conjunto, C, está dotado de una estructura de grupo, o, simplemente, que es un grupo, si existe una operación, $*$, tal que, al relacionar, por medio de dicha operación $*$, dos elementos cualesquiera, a y b (en este orden), de C, queda determinado unívocamente un elemento, c, perteneciente también al mismo conjunto C. El hecho de que al relacionar, por medio de la operación $*$, los elementos a y b se obtiene el elemento c se expresa simbólicamente así: $a*b=c$. Esa operación $*$ satisface, además, a las siguientes propiedades que constituyen el conjunto de los axiomas del grupo definido por la misma:

1ª.- Es asociativa, o sea que, si los elementos a, b y d pertenecen al conjunto C, (a*b)*d= =a*(b*d), siendo (a*b) y (b*d) los elementos del mismo conjunto C obtenidos al relacionar, mediante la operación *, los elementos a y b y los elementos b y d, respectivamente.

2ª.- Existe un único elemento, n, llamado "elemento neutro", perteneciente al conjunto C y tal que, para todo elemento e del mismo conjunto C, e*n= =n*e=e.

3ª.- A cada elemento e de dicho conjunto C le corresponde un elemento e', único, perteneciente al conjunto C y tal que e*e'=e'*e=n (al elemento e' puede llamársele "recíproco" del e).

Se dice que el conjunto C está dotado de una estructura de grupo abeliano (o conmutativo), o, simplemente, que es un grupo abeliano (o un grupo conmutativo), si la operación * es, además, conmutativa, o sea, si a las anteriores propiedades se les añade la siguiente:

4ª.- Siendo a y b dos elementos cualesquiera del conjunto C se verifica a*b=b*a.

Si un conjunto C, dotado de una estructura de grupo, está compuesto por un número infinito de elementos se dice que el indicado conjunto C es un grupo infinito, y si dicho conjunto C está compuesto por un número finito, n, de elementos se dice que C es un grupo finito; al número n se le llama, en este caso, orden del grupo C; en el primer caso (cuando C es un grupo infinito) también se dice que el orden de C es infinito.

Dado un conjunto C, dotado de una estructura de grupo para una operación $*$, se llama subgrupo de C a cualquier subconjunto S de C que satisface los axiomas de la indicada estructura de grupo para la misma operación $*$.

Sobre estos conceptos de grupo y subgrupo, y en relación con la trascendencia de los mismos, entiendo que revisten particular interés los párrafos de Piaget que a continuación transcribo:

"Fundamento del álgebra, la estructura de grupo ha resultado ser de una generalidad y de una fecundidad extraordinarias. Se la encuentra en casi todos los dominios de las matemáticas y en lógica;

ha adquirido una importancia fundamental en física y es probable que lo mismo ocurra algún día en biología. Interesa, por consiguiente, tratar de comprender las razones de este éxito, ya que, pudiendo ser considerado como un prototipo de las "estructuras", y en dominios en los que todo lo que se enuncia debe ser demostrado, el grupo depara las más sólidas razones para confiar en el porvenir del estructuralismo en cuanto reviste formas precisas".

"La primera de esas razones es la forma lógico-matemática de abstracción, de la cual procede el grupo y que explica la generalidad de sus utilizaciones. Cuando una propiedad es descubierta por abstracción a partir de los propios objetos, esa propiedad nos suministra, ciertamente, información sobre tales objetos, pero cuanto más general es la propiedad más corre el riesgo de ser, precisamente por aplicarse a todo, pobre y poco utilizable. Lo propio, en cambio, de la "abstracción reflexiva" que caracteriza el pensamiento lógico-matemático es que tal abstracción se hace surgir no de los objetos, sino de las acciones que se pueden ejercer sobre ellos y esencial mente de las coordinaciones más generales de esas acciones, tales como las que consisten en reunir, ordenar, poner en correspondencia, etc. Ahora bien, son precisamente esas coordinaciones generales las que se encuentran en el grupo, y ante todo: a) la posibilidad de un regreso al punto de partida (operación inversa del grupo) y b) la posibilidad de llegar a un mismo término por caminos diferentes y sin que ese punto de llegada sea modificado por el itinerario recorrido (asociatividad del grupo). En cuanto a la naturaleza de las composiciones (reuniones, etc.), puede ser independiente del orden (grupos conmutativos) o ser inherente a ella un orden necesario".

"En esas condiciones, la estructura de grupo es, por consiguiente, un instrumento de coherencia al que es inherente su propia lógica como consecuencia de su regulación interna o autorregulación. Así, por su ejercicio mismo, pone en funcionamiento tres de los principios fundamentales del racionalismo: el de no contradicción que está inserto en la reversibilidad de las transformaciones, el de identidad, que está asegurado por la permanencia del elemen to neutro, y, por último, ese principio, sobre el cual se insiste menos, pero que es asimismo esencial, según el cual el punto de llegada permanece independiente del camino recorrido...".

"El grupo es, luego, un instrumento esencial de transformaciones, pero de transformaciones racionales que no lo modifican todo a la vez y cada una de las cuales es solidaria de un invariante: de este modo el desplazamiento de un sólido en el espacio usual deja invariadas sus dimensiones, al partir un todo en fracciones no varía la suma total, etc. Por sí sola la estructura de grupo es suficiente para poner de manifiesto el carácter artificial de la antítesis sobre la que E. Meyerson fundamentó su epistemología, y según la cual toda modificación sería irracional, caracterizando sólo la identidad a la razón".

"Como combinación indisoluble de la transformación y de la conservación, el grupo es, pues, ante todo, un instrumento incomparable de constructividad, no sólo por el hecho de ser un sistema de transformaciones, sino también y sobre todo porque éstas pueden ser de alguna manera dosificadas por la diferenciación de un grupo en sus subgrupos y por los posibles pasos desde uno de éstos a los otros..." (1).

2. Otras estructuras algebraicas.

"La lógica en general, y la lógica simbólica en particular, es el estudio sistemático del proceso de razonamiento preciso". De la precedente frase, con la que se inicia la introducción de un manual de lógica elaborado por el National Council of Teachers of Mathematics de los Estados Unidos (2), y de las de Piaget sobre los conceptos de grupo y subgrupo que he transcrito anteriormente, entiendo que podemos deducir con suficiente claridad la importancia que en ese "estudio sistemático del proceso de razo-

1) Piaget, Le structuralisme, ed. cit., págs. 18, 19 y 20.

2) National Council of Teachers of Mathematics U.S.A., Lógica. Traducción de Federico Velasco Coba y Emilio Lluis Riera, México, 1970, pág. 11.

namiento preciso" que es la lógica debe serles asignada a los indicados conceptos de grupo y subgrupo. Tanto en su aspecto general como en el de sus específicas relaciones con el Derecho, la citada importancia de dichos conceptos será objeto de especial consideración en el capítulo de este trabajo dedicado al álgebra de la lógica; en ese mismo capítulo dedicado al álgebra de la lógica podrá observarse también el interés que para el estudio de las indicadas relaciones de la lógica con el Derecho revisten asimismo otras estructuras algebraicas. Con vistas, sin embargo, a analizar ahora relaciones más directas entre el Derecho y estructuras algebraicas más simples que grupos y subgrupos voy a exponer a continuación unas breves consideraciones sobre algunas de esas estructuras algebraicas más simples que grupos y subgrupos a las que acabo de aludir:

Si de entre los axiomas del grupo definido por una operación * que he enumerado eliminamos los que se refieren a la existencia del elemento recíproco de cada uno de los elementos del conjunto C y a la del elemento neutro, y si prescindimos, incluso, de la asociatividad como condición necesaria de la operación $*$, tenemos otra estructura algebraica más simple, pero también importante -el *grupoide*-, caracterizado solamente por el hecho de que, dados un conjunto C y dos elementos cualesquiera, a y b (en este orden), pertenecientes al conjunto C, queda determinado unívocamente un elemento c, perteneciente también a C, en virtud de una operación $*$ mediante la que se relacionan los elementos a y b; finalmente, si, en determinados casos, siendo h y k elementos del conjunto C, $h * k$ no es, a su vez, un elemento del mismo conjunto C, la operación $*$ recibe el nombre de "operación parcial" y, si se conservan, en todo lo posible, en los demás casos, las características del grupoide, la estructura que resulta se llama asimismo *grupoide parcial*. Resulta fácil comprobar ahora que esta última estructura -el grupoide parcial- es corriente -y fundamental- en el campo jurídico: podemos observarla, por ejemplo, en el razonamiento típico del juez al relacionar dos elementos -unos hechos y unos fundamentos de Derecho- pertenecientes al conjunto formado por los elementos a los que la legislación vigente concede trascendencia jurídica para obtener, como resultado, otro elemento -la sentencia-perteneciente al mismo conjunto.

Las acepciones que he utilizado de "grupoide", "operación parcial" y "grupoide parcial" corresponden a las que utiliza Abellanas en su "Geometría básica" (1), correspondiendo, asimismo, la de "grupoide", según indica el citado autor al advertir que "el vocablo "grupoide" se emplea en la literatura con significados muy diversos" (2), a la que usa el mismo en la cuarta edición de su obra "Elementos de Matemática".

\- - -

1) Abellanas, Geometría básica, Madrid, 1969.

2) Abellanas, op. cit., pág. 2, nota.

CAPITULO V.- FUNCIONES Y APLICACIONES. ISOMORFISMOS Y HOMOMORFISMOS.

1. Funciones y aplicaciones.

Sean X e Y dos conjuntos, distintos o no entre sí. Una relación entre un elemento variable de X (al que llamaré x) y un elemento variable de Y (al que llamaré y) se dice que es una <u>relación funcional en y</u> si, cualquiera que sea $x \in X$, existe un único elemento $y \in Y$ que está en la relación considerada con x. A los indicados elementos variables, <u>x</u> e <u>y</u>, se les suele llamar, simplemente, variables.

Se da el nombre de <u>función uniforme</u> (o, en forma más breve, simplemente, <u>función</u>) a la operación que asocia, en la forma que acabo de indicar, a todo elemento $x \in X$ el elemento $y \in Y$ que se encuentra en la relación dada con x; se dice entonces que <u>y</u> es el <u>valor</u> de la función para el elemento <u>x</u>, y que la función está <u>determinada</u> por la relación funcional que se considera. Una <u>función multiforme</u>, en cambio, hace corresponder a cada elemento x, perteneciente al conjunto X, dos o más elementos pertenecientes al conjunto Y (una función de este tipo puede deducirse, por ejemplo, de los casos en los que, según nuestro Código Penal, a un delito único le corresponden, alternativamente, dos penas distintas entre sí). En general, como he indicado antes, al decir simplemente "función" nos referimos, salvo advertencia en sentido contrario, a "función uniforme".

Para expresar, en forma genérica, que <u>y</u> es el valor, para el elemento <u>x</u>, de la función que se considera, se escribe y=f(x); a este elemento, y, se le llama <u>homólogo</u>, <u>correspondiente</u> o <u>imagen</u> de x; inversamente, a x se le llama, siendo y=f(x), <u>anti-homólogo</u>, <u>preimagen</u> o <u>imagen recíproca</u> de y.

La operación que hace pasar de x a y=f(x) se dice también que es una <u>aplicación</u> de X en Y, y suele representarse, genéricamente, por la letra <u>f</u>, que se llama, en este caso, <u>característica</u>; se dice, también de modo genérico, que "f es una aplicación de X <u>en</u> Y". Con el mismo significado que y=f(x) puede escribirse:

$$x \xrightarrow{f} y, \text{ o bien } f: x \longrightarrow y$$

y también: $$X \xrightarrow{f} Y, \text{ o bien } f: X \longrightarrow Y.$$

Al conjunto X se le llama conjunto de definición o de existencia de la función que estemos considerando, la cual se dice que está definida en (o sobre) el conjunto X; también se dice que la función citada toma sus valores en el conjunto Y, y que dicho conjunto Y es el conjunto de valores de la misma función. La variable x se llama variable independiente o argumento, y la variable y recibe el nombre de variable dependiente o, también, el de función.

Una función, definida en un conjunto X, que toma un mismo valor, a, en un conjunto Y -o, simplemente, $\{a\}$-, para todo elemento, x, de X, se llama constante en X; la relación funcional que la determina individualmente es $y=a$.

Dada una aplicación, f, de un conjunto X en un conjunto Y, se dice que dicha aplicación es sobreyectiva si cada elemento, y, del conjunto Y, es imagen de un elemento, x, del conjunto X, por lo menos; entonces a la aplicación f se le da también el nombre de "aplicación de X sobre Y", diciéndose asimismo que f es una transformación (que transforma el conjunto X en el conjunto Y), siendo, en este caso, y=f(x) el transformado del elemento x por la indicada transformación f; también, en el presente caso, se puede escribir, en forma genérica, Y=f(X).

En general, puede suceder que un mismo elemento, y, del conjunto Y, sea la imagen de varios elementos del conjunto X. En el caso particular, en cambio, de que ningún elemento del conjunto Y sea imagen de más de un elemento del conjunto X, o sea si dos elementos distintos de este conjunto X tienen, por la aplicación f de X en Y, imágenes distintas, en Y, se dice que f es una aplicación inyectiva.

Si una aplicación f de un conjunto X en un conjunto Y es tal que, para todo elemento y, perteneciente al conjunto Y, existe un único elemento x, perteneciente al conjunto X, tal que se verifique y=f(x) se dice que f es una aplicación biunívoca de X sobre

Y, o bien una aplicación biyectiva o una biyección. En este caso la aplicación f es a la vez sobreyectiva e inyectiva.

Una aplicación biyectiva de un conjunto X sobre sí mismo se llama una sustitución.

Cuando f es una aplicación biyectiva de un conjunto X sobre un conjunto Y, la relación $y=f(x)$ no solamente es funcional en y, sino que también es funcional en x; como tal "relación funcional en x" determina entonces una aplicación, también biyectiva, del conjunto Y sobre el conjunto X: a esta aplicación se le da el nombre de aplicación recíproca de f. Si llamamos g a la indicada aplicación recíproca de f, las relaciones $y=f(x)$ y $x=g(y)$ son equivalentes y la aplicación recíproca de g es f.

La aplicación f de un conjunto $X=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ en un conjunto $Y=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ (X e Y son conjuntos de n y m elementos, respectivamente) puede representarse mediante una tabla (representación tabular). Llamando, genéricamente, x a un elemento del conjunto X tal que, siendo y un elemento del conjunto Y, se verifique y=f(x), dicha tabla podría tener, por ejemplo, esta forma:

x	y=f(x)
a_1	b_1
a_2	b_2
a_3	b_2
.	.
.	.
.	.
a_n	b_m

Para que la aplicación f sea biyectiva deberá ser m=n; entonces a cada valor de x de la primera columna corresponderá un único valor de y en la segunda y, recíprocamente, a cada valor de y de la segunda columna corresponderá un único valor de x en la primera. Si la aplicación f no es inyectiva podrá corresponder, como ocurre en el ejemplo expuesto, un mismo valor de y=f(x) a valores distintos de x. Este último caso es corriente en el campo jurídico (un ejemplo, entre los muchos que aquí podrían citarse, se da normalmente cuando el conjunto X está formado por leyes vigentes en un momento dado y el conjunto

Y por fechas de entrada en vigor de dichas leyes, ya que es frecuente el hecho de que varias leyes entren en vigor el mismo día).

2. Correspondencias entre conjuntos.

Se dice que una aplicación biyectiva, de un conjunto X sobre un conjunto Y, y su aplicación recíproca realizan una correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos, X e Y, o bien que X e Y están en correspondencia biunívoca por estas aplicaciones. Suele usarse esta terminología cuando se quiere destacar que a cada elemento x, del conjunto X, le corresponde un único elemento y, del conjunto Y, y que, recíprocamente, a cada elemento y, del conjunto Y, le corresponde un único elemento x, del conjunto X.

Entre dos conjuntos, X e Y, existe una correspondencia uniplurívoca si cada elemento del conjunto Y corresponde a un único elemento del conjunto X, y existe una correspondencia pluriunívoca si a cada elemento del conjunto X le corresponde un único elemento del conjunto Y. Si se cumplen ambas condicio nes, es decir, si cada elemento del conjunto Y corresponde a un único elemento del conjunto X y, además, a cada elemento del conjunto X corresponde un único elemento del conjunto Y, la correspondencia, que resulta ser biunívoca, de acuerdo con el concepto de correspondencia biunívoca a que he hecho referencia en el párrafo anterior, recibe también el nombre de correspondencia uniunívoca.

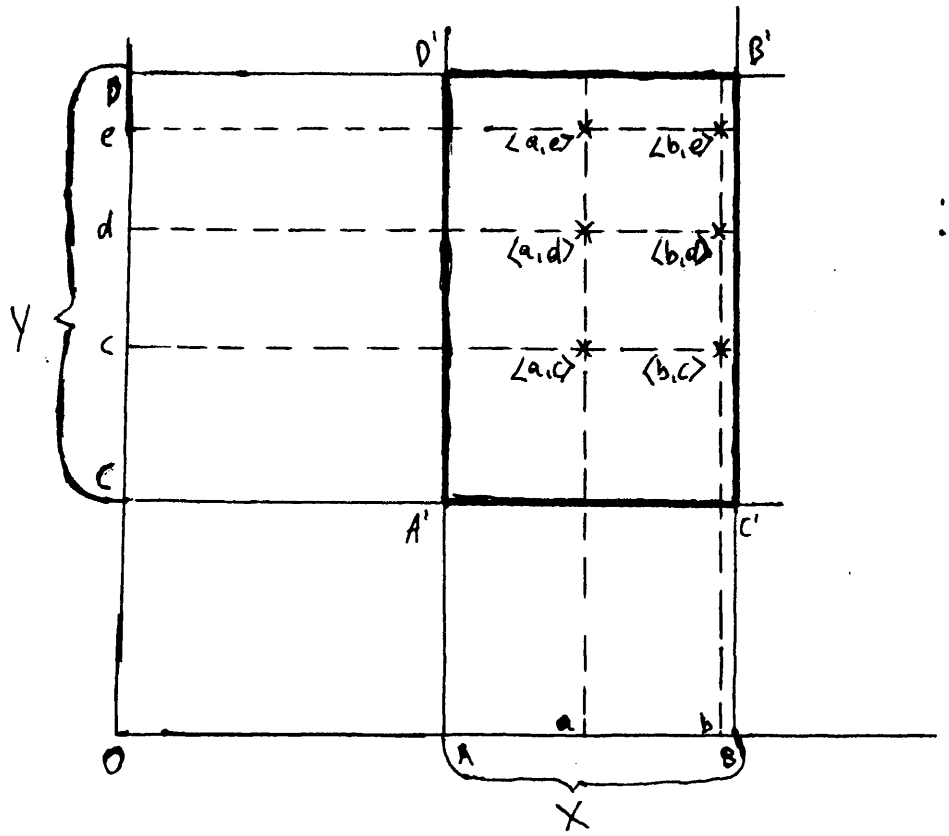
Cuando entre dos conjuntos, X e Y, puede establecerse una correspondencia biunívoca se dice que tales conjuntos, X e Y, son coordinables.

3. Producto cartesiano: gráfica de una relación.

Dados dos conjuntos, X e Y, distintos o no entre sí, se llama producto cartesiano, producto directo o, simplemente, producto de X e Y al conjunto formado por todos los pares ordenados $\langle x,y\rangle$, tales que $x\in X$ e $y\in Y$ (naturalmente x puede ser aquí cualquier elemento de X e y cualquier elemento de Y). Para designar simbólicamente al producto así definido se escribe $X \times Y$. Se verifica, naturalmente, en general, que $X \times Y \neq Y \times X$: el producto $Y \times X$ puede definirse como el conjunto formado por todos los pares ordenados $\langle y,x \rangle$ tales que $y \in Y$ y $x \in X$, en forma análoga a como se ha definido el producto $X \times Y$.

Si $z = \langle x,y \rangle$ es un elemento cualquiera del conjunto $X \times Y$ y llamamos a x e y primer y segundo elemento, respectivamente, del par ordenado z, la relación "x es el primer elemento del par ordenado z" es una relación funcional en x que determina una aplicación de $X \times Y$ sobre X a la que se le da el nombre de <u>primera coordenada</u>, <u>primera componente</u> o <u>primera proyección</u>, siendo designada asimismo, abreviadamente, mediante la notación pr_1; en vez de decir "x es el primer elemento del par ordenado z" se dice también "x es la primera coordenada de z", "x es la primera componente de z", "x es la primera proyección de z" o bien, abreviadamente, "$x = pr_1(z)$". En forma análoga a como se ha definido la "primera coordenada", "primera componente" o "primera proyección" se puede definir también la "segunda coordenada", "segunda componente" o "segunda proyección": se trata ahora de una aplicación de XxY sobre Y que se designa, abreviadamente, mediante la notación pr_2. De este modo la relación "$x=pr_1(z)$ e $y=pr_2(z)$" es equivalente a "$z=\langle x,y\rangle$".

Para representar gráficamente el producto cartesiano de dos conjuntos X e Y no suelen utilizarse los diagramas de Venn: una forma corriente de hacerlo consiste en representar los elementos de los conjuntos X e Y mediante puntos de dos segmentos situados cada uno de ellos en una de dos rectas perpendiculares entre sí, de manera que a todos los elementos del conjunto X les correspondan puntos de uno de dichos segmentos y a todos los elementos del conjunto Y les correspondan puntos del otro. Los elementos del producto XxY vienen entonces representados por puntos del rectángulo formado por las paralelas a cada uno de dichos segmentos que pasan por los extremos del otro. Así, si, para fijar las ideas, suponemos $X=\{a,b\}$ e $Y=\{c,d,e\}$, podemos representar gráficamente los citados conjuntos en la forma que puede observarse en esta figura:



En dicha figura los elementos del conjunto X están representados por puntos del segmento $\overline{AB}$, los del conjunto Y por puntos del segmento $\overline{CD}$ y los del conjunto XxY= $\{\langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle a,e\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle b,e\rangle\}$ por puntos del rectángulo A'D'B'C'. Puede observarse asimismo en esta figura el procedimiento que se sigue para la determinación de los puntos del rectángulo A'C'B'D' que corresponden, en la representación gráfica, a los elementos del conjunto XxY.

Una relación R entre un elemento x, perteneciente al conjunto X, y un elemento y, perteneciente al conjunto Y, es una propiedad del par ordenado $\langle x,y \rangle$, y define, por consiguiente, un subconjunto, G, del producto XxY; a este subconjunto G del conjunto XxY se le denomina gráfica de la relación R. Asimismo, cualquier subconjunto G del conjunto XxY es la gráfica de la relación $\langle x,y \rangle \in G$ entre x e y. Es frecuente el caso de que interese más la consideración de alguna gráfica G, subconjunto de un producto cartesiano XxY, que la consideración del propio conjunto XxY: así, en el ejemplo anteriormente expuesto en el que el conjunto X está formado por leyes vigentes en un momento dado y el conjunto Y por fechas de entrada en vigor de dichas leyes, mucho más interés que considerar la relación de cualquier ley perteneciente al conjunto X con cualquier fecha perteneciente al conjunto Y tiene, naturalmente, el considerar la relación que liga precisamente a cada una de dichas leyes con la fecha de entrada en vigor de la misma.

Al ser el producto cartesiano, XxY, de dos conjuntos, X e Y, asimismo, un conjunto, puede obtenerse el producto de dos conjuntos tales que uno por lo menos de ellos sea el XxY, o sea, siendo Z un conjunto, el producto (XxY)xZ -o bien el Zx(XxY)-; los productos (XxY)xZ y Zx(XxY) son, a su vez, conjuntos que pueden ser utilizados para obtener nuevos productos cartesianos, y así sucesivamente.

El producto cartesiano XxY en el caso en que sea X=Y será, naturalmente, XxX -o bien YxY-. En el presente caso, o sea cuando de lo que se trata es de designar simbólicamente el producto de un conjunto X por sí mismo, suele escribirse indistintamente, por ejemplo, XxX o X^2. Asimismo $(XxX)xX=X^2xX=X^3$, $X^3xX=X^4$, etc.

4. Isomorfismos y homomorfismos.

De acuerdo con lo que hemos visto en el capítulo II del presente trabajo un conjunto, C, entre cuyos elementos está definida una relación, R, *está dotado de* una estructura; se dice entonces también que el conjunto C *posee una estructura* y que la relación R *define una estructura en* dicho conjunto C; así, por ejemplo, y de acuerdo ahora además con lo que he indicado en el capítulo III de este mismo trabajo, se dice que una relación de orden define en un conjunto una estructura de orden o de conjunto ordenado.

Sean X e Y dos conjuntos, distintos o no entre sí, y supongamos definida una relación binaria, R, en el conjunto X y otra relación, también binaria, R', en el conjunto Y. Se dice que los conjuntos X e Y son *isomorfos*, respecto de las relaciones R y R', si pueden ponerse en correspondencia biunívoca mediante una aplicación biyectiva, f, de modo que, dados un par de elementos, x_1 y x_2, del conjunto X, y otro par de elementos, y_1 e y_2, del conjunto Y, se verifi que simultáneamente x_1Rx_2 e $y_1R'y_2$, siendo $y_1=f(x_1)$ e $y_2=f(x_2)$. La aplicación f se llama entonces un <u>isomorfismo.</u> Las estructuras que las relaciones R y R' indicadas definen en los conjuntos X e Y, respectivamente, se llaman también (una respecto a la otra) isomorfas, y a la relación que existe entre ellas se le da el nombre de <u>isomorfía.</u>

Las propiedades que se deducen de la relación R en el conjunto X se convierten, por el isomorfismo f, en propiedades que se deducen de la relación R' en el conjunto Y e inversamente.

Generalizando los conceptos anteriormente expuestos se pueden considerar asimismo isomorfismos entre dos conjuntos X e Y cuando las relaciones R y R' en cada uno de dichos conjuntos, respectivamente, no son únicas (por ejemplo, considerando tres relaciones, R_1, R_2 y R_3, definidas en X, y otras tres, R'_1, R'_2 y R'_3, definidas en Y).

Una aplicación f de un conjunto X en un conjunto Y se llama, en general -o sea, aunque f no sea biyectiva-, un homomorfismo respecto de dos relaciones binarias R y R', definidas, respectivamente, en X e Y, si, cuando se verifica $x_1 R x_2$ en el conjunto X (siendo x_1 y x_2 elementos de dicho conjunto X), se verifica también $f(x_1) R' f(x_2)$ en el conjunto Y.

Los conceptos de isomorfismo y homomorfismo pueden generalizarse también a los casos en que no sean binarias las relaciones que se consideren.

Una aplicación, f, de un conjunto X en un conjunto Y, en el caso en que sea un isomorfismo -o un homomorfismo-, se dice que transporta una estructura del conjunto X en una estructura del conjunto Y.

Por un camino diferente del que he seguido en el presente trabajo llega Klug al concepto de isomorfía en unas consideraciones finales de una "mirada general a los conceptos fundamentales del cálculo relacional", diciendo, sobre el indicado concepto de isomorfía y su importancia en el campo jurídico, lo siguiente:

"La isomorfía es una relación entre relaciones, que puede ser caracterizada de la siguiente manera: dos relaciones, R, S, serán isomorfas siempre que pueda establecerse entre ellas una relación biunívoca K -el llamado correlador-, por el que los miembros todos de R queden coordinados con todos los miembros de S, y al revés; mas de tal modo acoplados que siempre que entre x, y, del campo de R, valga la relación R, valga también entre los miembros correspondientes x', y', del campo de S, la relación S."

....

"Si la relación K no es uniunívoca (biunívoca), sino unipluriívoca o pluriunívoca, se dirá que entre las relaciones R, S, hay una relación de isomorfía parcial, manteniendo las demás condiciones".

"Para ilustración de lo dicho tomemos un ejemplo del Derecho: supongamos que se afirma que las constituciones de los Estados A_1, A_2 tienen la misma estructura. Esto significa que la constitución de uno de los estados es "imagen perfecta" de la del otro. Lo cual, dicho más exactamente, significa que dichas constituciones son isomorfas; que se da entre ellas un correlador. Así, si la anterior afirmación ha de ser correcta, tienen que cumplirse las siguientes condiciones:

A los órganos institucionales de A_1 tienen que corresponder en A_2 otros, en el mismo número y con iguales funciones. A cada relación jurídica entre los órganos institucionales de A_1 y los ciudadanos de A_1 tiene que darse una relación análoga en A_2 y sus miembros análogos".

"Si representamos lo dicho por un esquema en que las relaciones consideradas se simbolicen por flechas entre los miembros relacionados, si realmente se da isomorfía (igualdad de estructura) ha de resultar en ambos casos el mismo esquema, que reproducirá las relaciones dentro de cada estado A_1, A_2, consistiendo los cambios en cambios de terminología, vgr., donde se emplea el término de Parlamento usar el de Bundestag (Dieta)".

"Se ve por este ejemplo que cuando se habla de <u>formas</u> de Estado o <u>formas</u> de Constitución... se está aludiendo a estructuras en sentido lógico. Puede decirse en toda generalidad: que el concepto de isomorfía es importante para toda comparación de derechos, porque el tema propio del derecho comparado es justamente determinar si entre diferentes derechos hay isomorfía, o al menos isomorfía parcial. De ordinario sólo se podrá demostrar la existencia de una isomorfía parcial. Pero ésta existe siempre. Comparando las estructuras de los diferentes derechos que hay dentro de una nación se verá de ordinario la isomorfía de todos ellos, sobre todo si se trata de derechos para corporaciones subordinadas" (1).

En un lenguaje más arcaico que el que usa Klug -y mucho más, desde luego, que el que estamos acostumbrados a utilizar en teoría de conjuntos y, en general, en la llamada "matemática moderna"-, pero con una precisión conceptual realmente admirable, destacaron Beccaria y Voltaire, en sus consideraciones sobre lo que ellos llamaron "proporción entre los delitos y las penas", la importancia y la necesidad de la aplicación adecuada, en el análisis de las re-

---

1) Klug, Lógica jurídica. Traducción de García Bacca, Caracas, 1961, págs. 129, 130 y 131.

laciones entre tales delitos y penas y en la graduación de éstas últimas, de esos conceptos que conocemos ahora como isomorfismo y homomorfismo. Así, por ejemplo, resultan significativos en este sentido, además de los párrafos del libro de Beccaria "De los delitos y de las penas" ya transcritos en el primer capítulo del presente trabajo, esos otros del comentario de Voltaire al mencionado libro de Beccaria en los que, bajo el epígrafe "Del robo doméstico", nos muestra el citado escritor francés las tan curiosas como dramáticas consecuencias a las que se llega, o puede llegarse, en el proceso de encadenamiento de circunstancias que surge cuando se prescinde de la consideración de tales conceptos de isomorfismo y homomorfismo en la indicada graduación de penas:

"En los países en que un pequeño robo doméstico es castigado con pena de muerte, ¿este castigo desproporcionado no es muy dañoso a la sociedad? ¿No es un estímulo para el robo? Pues si sucede el que un amo entrega su criado a la justicia por un robo leve, y que se le quite la vida a este infeliz, todo el vecindario tiene a este amo en horror; todos conocen entonces que la naturaleza está en contradicción con la ley, y por consiguiente que ésta no vale nada".

"¿Qué es lo que esto hace? Que los amos, no queriendo cubrirse de oprobio, se contenten con despedir a sus criados, que van a robar a otra parte, y que de este modo se acostumbran al latrocinio. Siendo la misma pena para un pequeño robo que para uno considerable, es evidente que un hombre que quiera robar tratará de robar mucho. También podrán hacerse asesinos, con tal que crean que esto puede evitar el que sean descubiertos".

"Pero si la pena fuese proporcionada al delito, si el ladrón fuese condenado a los trabajos forzados, entonces los amos entregarían sin escrúpulo los ladrones a la justicia; entonces no habría vergüenza alguna en hacer esto, y el robo sería menos frecuente. Todo prueba la grande verdad de que una ley rigorosa produce muchas veces los mayores crímenes" (1).

---

1) Voltaire, Commentaire sur le livre "Des délits et des peines", traducción castellana editada, sin

Importantes, asimismo, en el sentido que estamos considerando, son, a mi modo de ver, las siguientes palabras con las que concluye Beccaria el capítulo que, en su citado libro, dedica particularmente a lo que él denomina "proporción entre los delitos y las penas":

"Si se destina una pena igual a los delitos que ofenden desigualmente la sociedad, los hombres no encontrarán un estorbo muy fuerte para cometer el mayor, cuando hallen en él unida mayor ventaja" (1).

La incuestionable relación del Derecho con la Sociología y con la Economía, por una parte, y los rigurosos estudios que, por otra, vienen llevándose a cabo en estos últimos años, desde distintos puntos de vista, sobre las estructuras sociales y económicas,

---

el nombre del traductor, en París, en 1828, y reeditada, juntamente con la traducción que he citado antes del libro de Beccaria "Dei delitti e delle pene", por "Alianza Editorial", en Madrid, en 1968, págs. 147 y 148.

1) Beccaria, obra, traducción y edición citadas, pág. 37.

mediante las modernas técnicas de análisis sociométrico y econométrico, basadas fundamentalmente en la estadística matemática y en la teoría de conjuntos, deben conducir también, forzosamente, a unos estudios rigurosos y efectivos de las isomorfías entre las estructuras jurídicas y las estructuras sociales, en general, y socio-económicas, en particular, que con ellas coexisten y se inter-relacionan (o bien que con ellas se pretenda hacer coexistir e inter-relacionar), estudios que, naturalmente, pueden abarcar también los de los homomorfismos, en general, que existan, surjan o se introduzcan entre los conjuntos que en tales estudios se consideren.

5. Las relaciones de caridad y de justicia como relaciones isomorfas entre partes de un único cojunto fundamental.

"La justicia" -dice Legaz Lacambra- "es insuprimible, pero puede y aun debe ser trascendida en las formas más puras de la amistad, como caridad o amor" (1). Voy a tratar de definir a continuación, como ejemplo de aplicación directa del concepto de isomorfía, en qué "forma", en un sentido lógico-matemático, la justicia "puede y aun debe ser trascendida" en la caridad:

En el desarrollo de un "Análisis estructural comparativo" de la caridad y el Derecho destaca Lombardi Vallauri el hecho de que, en cierto sentido,

---

1) Legaz Lacambra, Amor, amistad, justicia (Discurso de ingreso en la Real Academia de Jurisprudencia y Legislación), "Anuario de Filosofía del Derecho", tomo XIII, Madrid, 1968, pág. 41.

"también el Derecho, como la caridad, es "triádico", relación con el otro "desde" ("en")un término superior (que no es propiamente personal, sino colectivo)" (1).

Aunque en las citadas palabras de Lombardi Vallauri se refiere dicho autor a caridad y Derecho entiendo que, al ser la noción de justicia previa o primaria en relación con el Derecho, resulta oportuno que consideremos aquí también primariamente las relaciones específicas entre caridad y justicia. Además, como iremos viendo, tan "triádicas" como puedan ser las relaciones en las que interviene el Derecho (o, incluso, en algunas ocasiones, más que éstas, y, desde luego, en el mismo sentido) son las relaciones en las que interviene la justicia, por lo que, si sustituimos "Derecho" por "justicia" en las citadas palabras de Lombardi Vallauri, no disminuirán en absoluto su validez ni su trascendencia.

---

1) Lombardi Vallauri, Amicizia, carità, diritto. L'esperienza giuridica nella tipologia delle esperienze di rapporto, Milán, 1969, pág. 131.

Recordando ahora, por otra parte, las ideas sobre tríadas expuestas en el capítulo III del presente trabajo, el análisis de la naturaleza triádica de las relaciones de caridad y de justicia puede desarrollarse de acuerdo con las consideraciones siguientes:

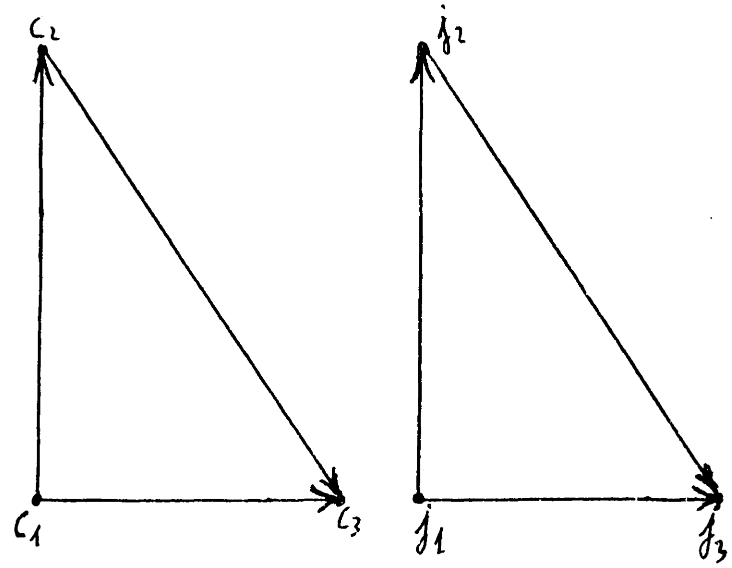
La caridad es "amor al prójimo", amor al género humano, amor al hombre en general, amor al hombre por el hecho de ser hombre. Por ahora nos es suficiente este aspecto puramente humano de la caridad, o sea que no tiene trascendencia para el presente estudio el hecho de que el amor al prójimo, para que constituya auténtica caridad, debe derivarse del amor a Dios, como tampoco la tiene la consideración de la justicia como virtud sobrenatural, moral o cardinal. Así, en las relaciones de caridad -o sea en el ejercicio de ésta- se nos presenta un conjunto, C, de tres elementos: en primer lugar, un elemento, c_1, que es la persona que ejerce la caridad; en segundo lugar, el elemento, c_2, "desde" ("en") el que se ejerce primariamente la caridad, elemento "que no es personal, sino colectivo", como dice Lombardi Vallauri, y, en tercer lugar, otro elemento, c_3, beneficiario concreto del acto -u obra- de caridad del elemento c_1. Considerado de esta manera el ejercicio de la caridad, el conjunto C es un conjunto de tres elementos, cada uno de los cuales es una persona o un conjunto formado por personas, o sea que en él se da la primera de las condiciones que se requieren, según hemos visto en el capítulo III, para que dicho conjunto C, desde el punto de vista lógico-matemático que ahora nos interesa, sea una tríada. Pueden observarse asimismo fácilmente las relaciones binarias de orden, derivadas del concepto de poder, entre los elementos c_1, c_2 y c_3 del conjunto C: así, el ejercicio de la caridad por parte del elemento c_1 implica la capacidad del mismo para "modificar la conducta" de los elementos c_2 y c_3 -aunque, con relación al c_2, tal capacidad pueda ser en algunas ocasiones, y desde un punto de vista puramente humano, insignificante o sensiblemente nula-, mientras que los elementos c_2 y c_3 constituyen un par ordenado, $\langle c_2, c_3 \rangle$, en el sentido de que los intereses del elemento colectivo c_2 prevalecen sobre los del elemento individual c_3, o sea que, en tal sentido, en el ejercicio de la caridad, el elemento c_2 "domina" al c_3.

Si consideramos ahora las relaciones de justicia, tenemos, en primer lugar, que, como dice Lombardi Vallauri al referirse a las mismas -y a las de Derecho-, "la relación de Derecho o de justicia no implica ni requiere, ni siquiera del lado pasivo, una directa opción con relación al otro. La que puede llamarse "buena voluntad jurídica" es, más bien, opción con relación al ordenado existir-conjuntamente, con relación al Nosotros social (al nivel técnico-jurídico: con relación al ordenamiento) en cuyo contexto nace y se inserta la relación singular" (1). De este modo se nos presenta aquí un conjunto, J, también de tres elementos (cada uno de los cuales es una persona o un conjunto formado por personas), en el que uno de tales elementos, el j_1, "administra" la justicia "para" y "en representación de" otro elemento, "social" o "colectivo", j_2, del mismo conjunto J, estando revestido, directa o indirectamente, dicho elemento j_1, con relación al j_2, de un determinado poder (legislativo, judicial o ejecutivo); final

1) Lombardi Vallauri, op. cit., pág. 130.

mente, debemos tener en cuenta, en la presente consi deración de las relaciones de justicia, el tercer elemento, j_3, del conjunto J, destinatario directo del concreto acto de administración de justicia de que se trate (reo si el elemento j_1 es el juez en el correspondiente juicio, contribuyente si el elemento j_1 es el legislador que promulga la ley tributaria que le afecta, etc.). Las relaciones binarias, derivadas del concepto de poder, que, para deducir el ca rácter de "tríada" del conjunto J, hay que considerar entre los elementos del mismo son las siguientes: entre el elemento j_1 y cada uno de los j_2 y j_3 se da una relación de orden, derivada del concepto de poder, al implicar la facultad de "administrar justicia" del elemento j_1 capacidad por parte del mismo para "modificar la conducta" de cada uno de los otros dos elementos del conjunto J; en cuanto a la relación de los elementos j_2 y j_3 entre sí, la ordenada convivencia social requiere, normalmente, que los intereses colectivos del elemento j_2 prevalezcan sobre los particulares del j_3, o sea que tal relación entre los elementos j_2 y j_3 sea también una relación de or den derivada del concepto de poder, poder que, en es te caso, es precisamente el de la colectividad sobre el individuo y que debe estar sujeto asimismo, en el contexto de la propia tríada que estamos considerando, a fuertes limitaciones.

Las consideraciones anteriores sobre relaciones binarias entre los elementos de cada uno de los conjuntos C y J pueden ser expresadas gráficamente mediante esa representación sagital a que alude Klug en el penúltimo de los párrafos de su "Lógica jurídica" que he transcrito en este mismo capítulo: uniendo para ello entre sí las expresiones simbólicas de los dos elementos de cada par ordenado mediante una flecha dirigida desde la expresión simbólica que corresponde al primer elemento del par hacia la que corresponde al segundo obtendremos también aquí, del mismo modo que en el ejemplo que analiza Klug, "en ambos casos el mismo esquema", como puede apreciarse en la siguiente figura:



Así, pues, tanto por mediación de esta figura como relacionando simplemente el concepto de isomorfía que nos ofrece Klug con las precedentes consideraciones sobre relaciones binarias de orden entre los elementos de cada uno de los conjuntos C y J, podemos deducir que, efectivamente, entre tales relaciones binarias de orden existe una relación de isomorfía: así, al corresponder al elemento c_1 del conjunto C el elemento j_1 del conjunto J, al c_2 del conjunto C el j_2 del conjunto J y al c_3 del conjunto C el j_3 del conjunto J, serán isomorfas la relación entre c_1 y c_2 con la relación entre j_1 y j_2, la relación entre c_1 y c_3 con la relación entre j_1 y j_3 y la relación entre c_2 y c_3 con la relación entre j_2 y j_3.

Volviendo ahora al análisis específico del concepto de caridad tenemos que la caridad es, como he dicho antes, "amor al prójimo, pero que ese "amor al prójimo" constitutivo de la caridad es, además, "amor al prójimo como a uno mismo", o sea que implica también "amor a uno mismo", amor a la persona concreta que ejerce la caridad: la unión de esta persona concreta -el elemento c_1 del conjunto C que venimos considerando- y "el prójimo" o "los demás", con relación a esa misma persona que constituye el citado elemento c_1, es un conjunto, H "género humano" o "humanidad", del amor al cual se derivan las relaciones de caridad y al que pertenecen asimismo los tres elementos del mencionado conjunto C.

Pero, además, a ese mismo conjunto H, fundamental en las relaciones de caridad como hemos visto, pertenecen también, al ser cada uno de ellos "una persona o un conjunto formado por personas", los tres elementos del conjunto J entre los que se dan las relaciones de justicia que he ido describiendo, o sea que tales elementos, j_1, j_2 y j_3, son asimismo subconjuntos o partes de dicho conjunto fundamental H.

De las precedentes consideraciones no se deduce, ni mucho menos, esa identificación entre justicia y amor o caridad de que hablaba Leibniz. Incluso a través de un análisis característicamente formal como el presente pueden observarse evidentes diferencias materiales entre las relaciones de caridad y las de justicia. Ahora bien, la isomorfía entre tales relaciones y el hecho de que, como acabo de destacar, todas esas relaciones se dan entre subconjuntos o partes de un único conjunto fundamental permiten, no obstante, que las relaciones de justicia <u>puedan ser, al propio tiempo</u>, relaciones de caridad: para que así ocurra deben identificarse el elemento c_1 del conjunto C con el j_1 del conjunto J y el elemento c_3 del primero de dichos conjuntos con el j_3 del segundo, lo cual resulta, por otra parte, perfectamente posible de acuerdo con las consideraciones anteriores; en cuanto a los elementos c_2 y j_2 no es corriente que puedan identificarse el primero con el segundo, o sea que no es corriente que se "administre la justicia", directamente, por lo menos, "para" y "en representación de" ese "prójimo" genérico que constituye el elemento c_2 en el conjunto C; es posible, en general, no obstante, que tal elemento j_2 -que es un conjunto formado por personas, o sea un subconjunto del conjunto fundamental H- sea, al propio tiempo, no el elemento c_2, sino el c_3, en un conjunto C en el que se den las relaciones de caridad, para lo cual los intereses del elemento colectivo c_2 de tal conjunto C deben prevalecer sobre los de dicho elemento, también colectivo, j_2.

Si, como dice Perelman en el párrafo final de su obra "De la justicia", "todo sistema de justicia debería no perder de vista su propia imperfección y concluir que una justicia imperfecta, sin caridad, no es justicia" (1) y si se quiere evitar, en cualquier "sistema de justicia", su "propia imperfección" (o "la parte de" tal "imperfección") derivada de la

---

1) Perelman, obra y traducción citadas, pág. 78.

ausencia de caridad, entiendo que en el proceso a se guir para ello no puede prescindirse de las precedentes consideraciones sobre relaciones formales entre caridad y justicia (debiendo tenerse en cuenta, además, que de lo que ahora se trata es de que esas relaciones de justicia que, según hemos visto, pueden ser, al propio tiempo, relaciones de caridad, aquí deben necesariamente serlo). Así, por ejemplo, el "sistema" que obtendríamos al prescindir de las relaciones de orden que, según hemos visto, pueden darse entre el elemento c_2 que interviene en las relaciones de caridad y los j_2 y j_3 del conjunto J invirtiendo el sentido de alguna de tales relaciones de orden (o de las dos), al ser un sistema de "justicia imperfecta, sin caridad", como señala Perelman, no sería, de acuerdo con lo que dice asimismo dicho autor, un auténtico "sistema de justicia".

6. Somera idea sobre morfismos, en general.

Al referirse a los morfismos, en general, dice Lucienne Félix:

"Se utiliza ahora como sustantivo lo que era un sufijo: los morfismos son aplicaciones f que transportan alguna estructura, por ejemplo: la estructura de orden".

"Los morfismos no forman un "conjunto" en el sentido matemático del término. Forman una categoría. Hay una rama nueva de la matemática que estudia las categorías, teoría más general que la de los conjuntos" (1).

Ejemplos de morfismos son, desde luego, los isomorfismos y los homomorfismos a los que me vengo refiriendo en este capítulo y entiendo que, en relación con el contenido del presente trabajo y con la finalidad del mismo, son suficientes dichos ejemplos.

---

1) Lucienne Félix, obra y traducción citadas, pág. 94.

No obstante, como para introducir en el capítulo VIII de este mismo trabajo el concepto de categoría resulta más cómodo, y parece asimismo más correcto, hablar de morfismos, en general, que particularizar sólo para los casos en que éstos sean concretamente isomorfismos u homomorfismos, he creído oportuno exponer aquí estas breves consideraciones sobre morfismos, en general; espero, por otra parte, que haya quedado así suficientemente aclarado el hecho de que, al hablar de morfismos en la definición de categorías, podemos perfectamente particularizar dicha definición refiriéndonos concretamente a esos isomorfismos y homomorfismos que hemos venido considerando en este capítulo.

- - -

C A P I T U L O VI .- EL ALGEBRA DE LA LOGICA

1. Breve idea introductoria sobre la situación actual de los estudios de lógica jurídica.

La utilización en la lógica moderna de los principios básicos de la teoría de conjuntos y de las leyes que caracterizan a las estructuras algebraicas, por una parte, y, por otra, los evidentes éxitos obtenidos recientemente por diversos autores que se han preocupado por lograr una eficaz aplicación de los principios y métodos de esa misma lógica moderna a la lógica jurídica hacen imprescindible, a mi modo de ver, que en un trabajo de la naturaleza del presente se preste particular atención a las repercusiones en la lógica y en la metodología jurídicas de la indicada utilización en la lógica moderna de los principios básicos de la teoría de conjuntos y de las leyes que caracterizan a las estructuras algebraicas, o sea que se preste particular atención, como he dicho, a las relaciones con la problemática específicamente jurídica de lo que viene llamándose "el álgebra de la lógica".

No creo que sea preciso ni oportuno extender este trabajo con un análisis detallado de esa aplicación, a la que me he referido en el párrafo anterior, de principios y métodos de la lógica moderna a la lógica jurídica puesto que tal análisis detallado puede verse fácilmente en la actualidad en diversos manuales de iniciación a dicha lógica jurídica recientemente publicados, como, por ejemplo, y limitándome a citar obras escritas en los idiomas más corrientes en los países occidentales -alemán, español, francés, inglés e italiano- y a un solo autor para cada uno de tales idiomas, los de Klug (1), García

---

1) Klug, Juristische Logik (3ª edición), Berlín, 1966. De la primera edición de esta obra, publicada en 1951, existe una traducción castellana a la que me he referido en el capítulo anterior.

Máynez (1), Kalinowski (2), Tammelo (3) o Amato (4). El hecho de que me haya limitado a una relación tan exigua de autores y obras se debe exclusivamente a que entiendo que tal relación es suficiente con vistas a los fines que persigo mediante el presente trabajo, y no implica, desde luego, que ignore, olvide ni menosprecie otras obras de títulos iguales o parecidos publicadas también recientemente en países occidentales ni los estudios que, en el campo de la lógica jurídica, vienen llevándose a cabo en países de

---

1) García Máynez: Lógica del juicio jurídico, México, 1955; Lógica del concepto jurídico, México, 1959; Lógica del raciocinio jurídico, México, 1964. Puede verse, asimismo, de este autor y relacionada con el tema que nos ocupa, la obra Los principios de la ontología formal del Derecho y su expresión simbólica, México, 1953.

2) Kalinowski: Introduction à la logique juridique, París, 1965; La logique des normes, París, 1972.

3) Tammelo, Outlines of modern Legal Logic, Wiesbaden, 1969.

4) Amato, Logica simbolica e diritto, Milano, 1969.

Europa oriental, como Polonia, por ejemplo, donde, según nos informa Kalinowski, esta misma lógica jurídica está incluída, desde hace bastantes años en los programas de las Facultades de Derecho (1).

Intimamente relacionada con la lógica jurídica, tanto en sus métodos como en sus fines, está la lógica deóntica -lógica de las normas o de los conceptos normativos- que vienen sistematizando y desarrollando en estos últimos años von Wright y sus discípulos, principalmente. Fundamentales para la iniciación en el estudio de esa importante rama de la Lógica son la obra del propio von Wright "Norma y acción. Una investigación lógica" (2) y la de este mismo autor y varios colaboradores publicada más recientemente con el título "Deontic Logic. Introductory and systematic readings" (3). Extraordinario interés

---

1) Kalinowski, Introduction à la logique juridique, pág. 8.

2) Von Wright, Norma y acción. Una investigación lógica. Traducción de García Ferrero, Madrid, 1970.

3) Deontic Logic. Introductory and systematic readings, Dordrecht, 1971. Este libro contiene siete artícu

en relación con el tema del presente estudio tiene asimismo, a mi modo de ver, el trabajo de Apostel "Game Theory and the interpretation of Deontic Logic" (1), ya que en tal trabajo trata su autor de sentar las bases para una prometedora interrelación entre esas dos importantes ramas de la Lógica y de las Matemáticas -la lógica deóntica y la teoría de juegos, respectivamente- de acuerdo con las concepciones actuales de ambas disciplinas, aludiendo particularmente a la posibilidad que, según dicho autor, existe -y cuya trascendencia en el campo de la lógica jurídica es evidente- de que la teoría de juegos llegara a ser "el fundamento no sólo de la lógi-

---

los sobre lógica deóntica originales de: Føllesdal y Hilpinen (Deontic Logic: An introduction); Hanson (An analysis of some Deontic Logics); Hintikka (Some main problems of Deontic Logic); Kanger (New Foundations for Ethical Theory); Segerberg (Some Logics of Commitment and obligation); von Wright (A new System of Deontic Logic y Deontic Logic and the Theory of Conditions).

1) Apostel, Game Theory and the interpretation of Deontic Logic, en "Logique et Analyse", 3, 1960, págs. 70 a 90.

ca deóntica, sino también de la lógica deductiva en un sentido más general" (1).

En cuanto a esa "argumentación", cuyo "dominio", según Perelman y Mme. L. Olbrechts-Tyteca, es "el de lo verosímil, de lo plausible, de lo probable, en la medida en que esto último escapa a las certidumbres del cálculo" (2), y cuyo interés para los juristas es indudable, la conveniencia de relacionarla también con la teoría de juegos ha sido destacada asimismo por Apostel mediante el razonamiento siguiente:

"...La discusión es, al fin y al cabo, una interacción lingüística. Eso supuesto, nosotros disponemos de una teoría de la comunicación y de la información. Pero, siendo la interacción de las significaciones y de los valores uno de los aspectos esenciales de la argumentación, la teoría de la información no podrá ser aplicada a los fenómenos de discu-

---

1) Apostel, op. cit., pág. 90, nota.

2) Perelman y Obrechts-Tyteca, Traité de l'Argumentation, París, 1958, pág. 1.

sión más que en la medida en que la teoría de la utilidad subjetiva y de los conflictos (teoría de juegos) se haya podido asociar a la teoría de la información" (1).

Tanto la viabilidad de la lógica deóntica como la utilidad en la lógica y en la metodología jurídicas de los principios y métodos de la lógica moderna están hoy fuera de toda duda. Interesantes, a mi modo de ver, en apoyo de la afirmación precedente, son, en relación con la viabilidad de la lógica

---

1) Apostel, Rhétorique, psycho-sociologie et logique, en "La Théorie de l'Argumentation (recueil publié par le Centre National Belge de Recherches de Logique)", Louvain, 1963, pág. 268. En el citado trabajo relaciona dicho autor con la retórica y la argumentación, además de la teoría de juegos, otros métodos y teorías procedentes de la Lógica y de las Matemáticas (al tema concreto "Théorie de l'Argumentation et théorie des jeux" se refiere Apostel particularmente en las páginas 302 a 305 de dicho trabajo). Es fundamental, por otra parte, tanto para la iniciación en el estudio de la "teoría de la argumentación" y en el manejo de las "técnicas argumentativas" como para la cabal comprensión de las relaciones entre tal argumentación

Sobre la utilidad, por otra parte, de los principios y métodos de la lógica moderna en los ámbitos de lo que él denomina, separadamente, "Lógica del Derecho" y "Lógica jurídica propiamente dicha", dice Legaz Lacambra lo siguiente:

"Evidentemente los simbolismos de la Lógica moderna e incluso muchas de las incitaciones provenientes del positivismo lógico y el "fisicalismo" pueden ser de extremada utilidad en el ámbito de la Lógica del Derecho y en el de la Lógica jurídica propiamente dicha. El razonamiento jurídico se beneficiará decisivamente del uso del análisis lógico riguroso o "cálculo lógico" de la Logística, por la aplicación de los principios semánticos, la distinción de los "marcos de referencia" o "niveles de la investigación", la referencia a los observables y la verificabilidad de las aserciones, etc." (1).

Refiriéndose asimismo a la utilidad de la lógica moderna en determinadas parcelas del campo del

1) Legaz Lacambra, Filosofía del Derecho, Barcelona, 1972, pág. 51.

Derecho (y al fundamental problema de la consideración del "rigor de los límites" de dicha lógica moderna en la aplicación de la misma al tratamiento de la problemática jurídica), en el párrafo final del capítulo titulado "Neopositivismo, lógica y lenguaje en el derecho" de su obra "Metodología de la ciencia del Derecho", dice Hernández Gil lo siguiente:

"...tornando la mirada hacia la ciencia jurídica, puede afirmarse que la lógica formal simbólica está llamada a desempeñar una importante función depuradora del discurso jurídico... Aquella imprecisa lógica del conceptualismo tenía unas pretensiones absorbentes respecto de la ciencia jurídica. Ese peligro parece conjurarse con la nueva lógica si, consciente de todos los rigores, es consciente también del rigor de sus límites" (1).

Al ocuparse, por otra parte, del específico problema de las relaciones entre la lógica ("y

---

1) Hernández Gil, Metodología de la ciencia del Derecho, Madrid, 1971, vol. II, págs. 198 y 199.

singularmente las aplicaciones de la misma que se realizan en el razonamiento del abogado") y la argumentación dice también Hernández Gil, en otra de sus obras:

"La lógica -y singularmente las aplicaciones de la misma que se realizan en el razonamiento del abogado- es el procedimiento más riguroso para conducir la argumentación. Contraponer ésta a la lógica sólo cabe en cuanto la argumentación puede tener un alcance más extenso" (1). "No sirve, en cambio" -continúa diciendo el mencionado autor- "para decir que la argumentación se obtiene sobre la base de prescindir del razonamiento lógico. Que cubre otras zonas, parece cierto; que no pueda albergar el razona-

---

1) Ahí, en una oportuna nota, dice asimismo Hernández Gil textualmente lo siguiente: "Sin embargo, en la moderna lógica simbólica tiende a establecerse una equivalencia entre argumento y deducción en el sentido de que el argumento es una deducción. Cfr. GARRIDO, <u>Lógica simbólica</u>, Tecnos, páginas 17 y 71, Madrid, 1974".

miento lógico, incierto" (1).

Interesante asimismo, con vistas a la delimitación de la finalidad de las aplicaciones en el campo del Derecho de las "técnicas argumentativas", es la siguiente observación del propio Hernández Gil: "El abogado no defiende argumentos, sino con argumentos, y lo que pretende no es el triunfo de sus argumentos, sino lo pedido con base en ellos" (2).

Aun en el caso de que hubiera tenido existencia real una auténtica polémica entre "formalistas" y "anti-formalistas" en relación con la lógica jurídica y no se hubiese tratado más bien de un "diálogo de sordos" como se pregunta Foriers (3) -y como en-

---

1) Hernández Gil, El Abogado y el Razonamiento jurídico, Madrid, 1975, pág. 82.

2) Hernández Gil, El Abogado y el Razonamiento jurídico, pág. 83.

3) Foriers, L'état des recherches de logique juridique en Belgique, en "Logique et Analyse", abril 1967, pág. 41.

tiendo yo mismo que debió ser efectivamente-, de tener algún interés hoy dicha "polémica" se trataría puramente, a mi modo de ver, de un interés histórico. A raíz de tal "polémica", sin embargo, se publicaron hace algunos años diversos trabajos de indudable trascendencia en la evolución y desarrollo de la lógica jurídica actual, entre los cuales ocupan un lugar destacado los de Horowitz titulados "Exposé et critique d'une illustration du caractère prétendu non-formel de la logique juridique" (1) y "La logique et le droit" (2). En este último analiza Horowitz, además de lo que denomina "tesis antiformalista filosófica", unas "tesis antiformalistas prácticas", de entre las que selecciona para sus comentarios las concernien-

---

1) Horowitz, Exposé et critique d'une illustration du caractère prétendu non-formel de la logique juridique, en "Archives de philosophie du droit", vol. 11, 1966, págs. 181 a 204.

2) Horowitz, La logique et le droit, en "Logique et Analyse", abril 1967, págs. 43 a 56.

tes a "la interpretación judicial", "el desarrollo del sistema jurídico" y "la investigación y la enseñanza" (1), para concluir diciendo: "Creo haber demostrado... que la tesis antiformalista filosófica, es decir, la afirmación de que el razonamiento y la lógica específicamente jurídicos son esencialmente no formales, es inaceptable, y después... que las tesis antiformalistas prácticas, si no presuponen o requieren la adhesión a la tesis antiformalista filosófica, no son incompatibles con el reconocimiento del carácter en principio formal del razonamiento específicamente jurídico desde el momento en que éste es racional" (2), y finalmente: "...me considero totalmente justificado al llegar a la conclusión de que el desacuerdo entre el antiformalismo... y la posición formalista tal como entiendo representarla es, en resumidas cuentas, más aparente que real" (3).

---

1) Horowitz, La logique et le droit, págs. 49 y sigs.

2) Horowitz, La logique et le droit, pág. 55.

3) Horowitz, La logique et le droit, pág. 56.

Relacionado en cierto modo con la indicada "polémica" entre "formalistas" y "anti-formalistas" está asimismo un interesante artículo de Viehweg (1) en el que, reconociendo dicho autor, por una parte, que "quienes sostienen que la lógica formal no basta, por sí sola, para explicar el pensamiento jurídico tienen seguramente razón" (2), trata de explicar, por otra, tanto los conceptos de "lógica moderna" y "lógica matemática" como su utilidad para los juristas a través de los párrafos siguientes:

"Se entiende hoy por el término "lógica moderna" la lógica formal bajo estructura matemática. Se la podría designar aquí, de modo breve y en un sentido aproximado, como "lógica matemática". Su evolución está lejos de haber concluído, y las formas particulares que reviste deben ser captadas como distin

---

1) Viehweg, La "logique moderne" du droit (traducción francesa de N. Poulantzas), en "Archives de philosophie du droit", 1966, págs. 207 a 209.

2) Viehweg, obra y traducción citadas, pág. 208.

tas unas de otras. En todas ellas, sin embargo, se podría delimitar por lo menos el siguiente carácter común: la "lógica matemática" opera, siguiendo el modelo matemático, según un cálculo, es decir, según un método formalista; éste consiste principalmente en el hecho de que las reglas operatorias se refieren exclusivamente a las propiedades formales de los signos empleados y no a su sentido (ver J.M. Bochenski, "Formale Logik", 1956, p. 311)".

"El problema es, pues, el siguiente: ¿esta "lógica matemática" representa un logro para los juristas? O, dicho de otro modo, ¿eso que se llama "lógica jurídica", la lógica que emplean los juristas, en su práctica, puede quedar definida, de una manera exhaustiva y satisfactoria, por la "lógica matemática"?".

"Primera respuesta: No,- mientras se entienda por "lógica jurídica" aquello que traspasa el cuadro de la lógica "formal"...".

"Segunda respuesta: Sí,- mientras se entienda por "lógica jurídica" exclusivamente la lógica "formal" en su aplicación jurídica. Las posiciones de los problemas, en el marco de una "lógica jurídica" así concebida, pueden ser diferentes, como lo ha demostrado más particularmente N. Bobbio; por ejemplo, estas posiciones son diferentes en García Máynez, U.Klug y G. Kalinowski. No obstante, la "lógica matemática" puede, al recoger todas estas posiciones de los problemas, rendir buenos servicios a la lógica "formal" en su aplicación al Derecho. Puede ya reclamar para sí éxitos prácticos. Puede ya programar casos jurídicos (aún relativamente fáciles) concernientes al Derecho fiscal y al Derecho de seguros, de tal manera que sean susceptibles de solución mediante máquinas especiales. Se puede suponer así que, con la ayuda de la "lógica matemática", el dominio de la aplicación de las máquinas al Derecho podrá ser ampliamente extendido. En la medida en que, en estos casos, no se trata más que de la aplicación de la lógica formal en el Derecho, los límites de este método coinciden con los del cálculo formal..." (1).

---

1) Viehweg, obra y traducción citadas, págs. 207 y 208.

Esos "éxitos prácticos" a que alude Viehweg no se reducen, ni mucho menos, a los conseguidos en "el dominio de la aplicación de las máquinas al Derecho" que, como dice acertadamente el citado autor, "podrá ser" -y, de acuerdo con lo que iremos viendo a continuación, "está siendo"- "ampliamente extendido". El notorio interés que reviste en la actualidad el estudio de la problemática que va surgiendo al tratar de utilizar, con la conveniente eficacia, computadoras como instrumentos auxiliares en el campo del Derecho, y el considerable incremento cuantitativo que, como consecuencia del citado interés, ha venido produciéndose en estos últimos años en las investigaciones referentes a tal problemática, requieren, a mi modo de ver, no obstante, que, independientemente de la importancia relativa de este aspecto de la aplicación de la lógica al Derecho al que me vengo refiriendo en el contexto global de dicha aplicación, incluya en esta breve exposición de noticias sobre la situación actual de los estudios de lógica jurídica algunas referencias concretas al mencionado aspecto de la aplicación de la lógica al Derecho.

Fruto de esas investigaciones a las que me he referido en el párrafo anterior han sido los numerosísimos artículos publicados bien en revistas cuyo contenido abarca una temática más amplia o bien en las diversas revistas especializadas que se han creado en estos últimos años, como, por ejemplo, "Law and Computer Technology", creada a raiz del "Congreso mundial para la Paz por el Derecho", celebrado en 1967, y que se edita en la actualidad en Ginebra, o "Jurimetrics Journal", que se viene editando en Chicago desde 1966 con el indicado nombre, y que sucedió a la "M.U.L.L. (Modern Uses of Logic in Law)" en cuanto sus editores se percataron de que ese "moderno uso de la Lógica" en el campo jurídico que los americanos conocen como "jurimetrics" había adquirido entidad suficiente para contar con una revista propia. Se han publicado asimismo recientemente diversos libros cuyo tema es esa moderna disciplina a la que los autores de los indicados libros asignan la denominación de "informática jurídica" o alguna otra similar: de entre dichos libros entiendo que es digno de ser mencionado particularmente, como manual de iniciación a la citada disciplina, el "Corso di informatica giuri dica" de Losano (1).

La organización de esas investigaciones a las que me vengo refiriendo ha requerido, por otra parte, a causa de la trascendencia, magnitud y com - plejidad de las mismas, la creación de centros especializados, de entre los que voy a citar -limitando mis referencias a centros creados en Francia, Italia y Bélgica, por ser éstos países próximos al nuestro y tener con él peculiares afinidades (en el campo del Derecho, sobre todo)- los siguientes:

CEDIJ (Centre pour le Développement de l'Informatique Juridique), París; los centros CRIDON (Centre de Recherches d'Information et de Documentation Notariales), el primero de los cuales inició sus actividades en Lyon, habiéndose creado posteriormente otros cuatro en París, Lille, Nantes y Burdeos, respectivamente; IRETIJ (Institut de Recherches et

---

1) Losano, Corso di informatica giuridica, Milano, 1971.

d'Etudes pour le Traitement de l'Information Juridique), en colaboración con el Centre National de la Recherche Scientifique, Montpellier. Centro di Giuscibernetica dell'Università di Torino. CREDOC (Centre de Documentation du Droit), Bruselas.

Otros centros similares vienen funcionando asimismo en Estados Unidos, la U.R.S.S., Gran Bretaña, Canadá, etc., realizándose también en diversos paises eficaces investigaciones relacionadas con la aplicación a la problemática jurídica de los métodos de cálculo automático en centros que no están particularmente especializados para ello.

Además del interés que indudablemente tienen para los juristas otras utilizaciones más genéricas de las computadoras (como las que se derivan de la facilidad de éstas para almacenar y suministrar rápidamente información o para agilizar la gestión burocrática y administrativa, en general), el que reviste el estudio de las posibilidades de aplicación específica de este tipo de máquinas en el campo del Derecho resulta hoy asimismo evidente. Sobre esta aplicación específica de las computadoras en el campo del Derecho se han publicado recientemente diversas obras, de entre las cuales voy a aludir particularmente, tanto por el interés intrínseco de la misma como por tratarse de la obra de un compatriota, a un libro de Sánchez-Mazas en el que dicho autor expone los fundamentos y desarrolla el proceso de aplicación de un original "cálculo jurídico" (1). Sobre la utilidad de dicho "cálculo jurídico" -y sobre las limitaciones del mismo- dice Sánchez-Mazas, al final de un artículo publicado con posterioridad (2), lo siguiente:

"...Me limitaré a señalar categorías muy generales de problemas susceptibles de tratamiento utilizando nuestro cálculo jurídico:

1. Estudio de la estructura interna de los

---

1) Sánchez-Mazas, Cálculo de las Normas, Barcelona, 1973.

2) Sánchez-Mazas, L'arithmétisation du langage juridique et le fonctionnement d'un ordinateur, en "Archives de philosophie du droit", 1974, págs. 291 a 313.

sistemas normativos:

1 a. Estudio de su consistencia (descubrir las antinomias, contradicciones internas, etc.);

1 b. Estudio de su completitud (descubrir las lagunas de la ley);

1 c. Estudio de su redundancia (descubrir las repeticiones);

1 d. Descubrir las derogaciones tácitas tras las promulgaciones de nuevas normas;

(Este tipo de estudio podrá ayudar al conocimiento y al perfeccionamiento del sistema normativo en sí).

2. Estudio de las incompatibilidades de hecho de las normas en ciertos sistemas fácticos;

3. Ayudar a la resolución de casos concretos (instrumento auxiliar en las sentencias)".

....

"...algunos aspectos esenciales de la vida jurídica, como la prueba y la calificación de los hechos o la interpretación de la ley, quedarán, ello es innegable, fuera de la máquina. No lo olvido" (1).

Esa "aritmetización del lenguaje jurídico", inherente a su "cálculo de las normas", a la que se refiere Sánchez-Mazas en el título de su mencionado artículo, debe ser entendida en conexión con la "matematización" -en sentido más amplio- "de las normas" a la que alude Klug al decir que "en la medida en que los problemas del Derecho son racionales, la última y más moderna consecuencia de una construcción exacta de sistemas teóricos y empíricos del Derecho es la matematización de las normas" (2). Entiendo,

---

1) Sánchez-Mazas, L'arithmétisation du langage juridique et le fonctionnement d'un ordinateur, págs. 312 y 313.

2) Klug, La teoría del Derecho Natural en tanto problema de la metateoría y de la metalógica de las normas, en "Problemas de Filosofía del Derecho".

./.

por otra parte, que, tanto por el valor que les da el hecho de haber sido escritas por el autor del primer manual -cronológicamente- de lógica jurídica en su sentido actual como por la relación que tienen con el contenido del presente trabajo, no podían faltar, en esta breve exposición de noticias sobre la situación de los estudios relativos a esa misma lógica jurídica en nuestros días, las precedentes palabras de Klug.

./.

Versión castellana de Ernesto Garzón Valdés, Buenos Aires, 1966, págs. 28 y 29.

2. Sistematización del cálculo proposicional y de la teoría del silogismo mediante las leyes por las que se rigen los fundamentos de la teoría de conjuntos.

En el capítulo primero de este trabajo hemos visto las conexiones de la teoría de conjuntos -y, concretamente, de la relación de pertenencia- con la teoría de la predicación. En el presente vamos a ver cómo el análisis de las relaciones lógicas entre proposiciones denominado corrientemente "cálculo proposicional", y el de las aplicaciones de éste en la "teoría del silogismo", pueden ser desarrollados asimismo en conexión con la teoría de conjuntos, y de acuerdo, además, con unos métodos operatorios típicamente algebraicos de los que, en teoría de conjuntos, se derivan unas "álgebras de conjuntos", cuyas "operaciones" son las típicas de esa misma teoría de conjuntos a las que me he referido en el capítulo primero de este trabajo (unión, intersección, etc.), y que, en el cálculo proposicional, dan lugar a las llamadas "álgebras de Boole" y "álgebras de Lindenbaum". Aunque puede demostrarse, en general, que toda álgebra de Boole es isomorfa con una determinada álgebra de conjuntos (1), entiendo que, más que una consideración rigurosa y exhaustiva de los indicados isomorfismos, lo que conviene a la naturaleza del presente trabajo es una exposición simple y elemental de las leyes mediante las que, por una parte, se rigen los fundamentos de la teoría de conjuntos y que constituyen, por otra, la base de esa "álgebra de proposiciones" a la que Boole redujo, como veremos seguidamente, "una gran parte del razonamiento lógico ordinario". Para el desarrollo de esa "exposición simple y elemental" a que acabo de referirme utilizaré un texto de F.M. Hall (2) que considero particular-

---

1) Puede verse esta demostración, por ejemplo, en el libro de Stoll Introduction to Set Theory and Logic, San Francisco, 1963, págs. 271 y 272.

2) F.M. Hall, An introduction to abstract algebra, Cambridge, 1966. Las leyes mediante las que se rigen los principios básicos de la teoría de conjuntos pueden verse en las págs. 32 a 38 del volumen primero y la aplicación de dichas leyes al cálcu-

mente idóneo con vistas al indicado fin, limitándose mis aportaciones originales a la exposición de algunos ejemplos aclaratorios, útiles, a mi modo de ver, para una mejor comprensión de las ideas expuestas por Hall, y, sobre todo, a la ampliación de tales ideas en aquellos aspectos en los que entienda que tal ampliación puede ser útil en el campo específico del Derecho:

"Es un hecho destacado" -dice Hall- "el que una gran parte del razonamiento lógico ordinario puede ser reducida a un álgebra, precisamente al álgebra de conjuntos. Así fue hecho por primera vez por George Boole (1815-1864) en su libro "The Laws of Thought", publicado en 1854...". "Vamos a ver cómo las proposiciones pueden ser expresadas en una forma simbólica que obedece a las mismas reglas que el álgebra de conjuntos".

---

lo proposicional y a la teoría del silogismo en lás págs. 41 a 46, también del volumen primero.

"Designemos por A, B, C,... ciertas proposiciones, cada una de las cuales pueda ser verdadera o falsa. Como ejemplo supongamos que:

A	corresponde	a la	proposición:	"todos los monos son estúpidos".
B	"	" "	"	"las manzanas son buenas este año",
C	"	" "	"	"me gustan los gatos",
D	"	" "	"	"todos los mamíferos son estúpidos"."

"<u>Inclusión</u>

Leyes:

1.- Reflexiva: Para cualquier conjunto A se verifica $A \subset A$.

2.- Anti-simétrica: $A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A=B$.

3.- Transitiva: $A \subset B$ y $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

"La verdad de cada una de las proposiciones A, B y C es independiente de la de las otras, pero si D es verdadera lo es también A. Este hecho se expresa escribiendo $D \subset A$, con lo cual resulta evidente que se cumplen, en este caso, las leyes 1 y 3, mientras que la 2 podría expresarse diciendo que si la verdad de A implicara la de B y viceversa, entonces A y B serían "iguales" proposiciones, es decir, lógicamente equivalentes".

Puede verse con mayor claridad que se cumple la ley 3 añadiendo una quinta proposición: "todos los monos de Gibraltar son estúpidos", a la que asignaremos la letra E; entonces se verifica $D \subset A$ y $A \subset E$, de donde se deduce que $D \subset E$, o sea que si todos los mamíferos son estúpidos lo serán todos los monos de Gibraltar.

"Unión e intersección

Leyes:

4.- Conmutativas: a) $A \cup B = B \cup A$;

b) $A \cap B = B \cap A$.

5.- Asociativas: a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

6.- Distributivas: a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

7.-...: a) $A \cup A = A$.

b) $A \cap A = A$.

8.-...: a) $A \cup (A \cap B) = A$.

b) $A \cap (A \cup B) = A$".

"En lógica necesitamos frecuentemente relacionar dos proposiciones para formar una tercera, uniendo las dos primeras mediante las palabras "o" ("o bien") o "y" o algunas otras equivalentes".

"Escribamos $\vee$ para indicar "o" ("o bien") y $\wedge$ para indicar "y". Entonces $A \vee B$ es la proposición: "todos los monos son estúpidos *o* las manzanas son buenas este año" (posibles ambas cosas), las cuales pueden también ser, independientemente, verdadera o falsa una u otra. $A \wedge B$ es la proposición: "todos los monos son estúpidos *y* las manzanas son buenas este año".

"Examinemos las leyes 4 a 8 y estas últimas proposiciones, reemplazando $\cup$ y $\cap$ en las leyes por los símbolos $\vee$ y $\wedge$. Las leyes conmutativa y asociativa sólo necesitan un momento de atención. Por ejemplo, las dos proposiciones i) "todos los monos son estúpidos o las manzanas son buenas este año" e ii) "las manzanas son buenas este año o todos los monos son estúpidos" son iguales en el sentido de ser lógicamente equivalentes: la verdad de una de ellas implica la verdad de la otra. Es obvio también que se satisfacen las leyes 7".

"La primera de las leyes distributivas dice que las dos proposiciones (usando las A, B y C de nuestro particular ejemplo, sin volverlas a escribir, para ahorrar espacio y dar generalidad al argumento) i)"o bien A es verdadera o bien B y C son ambas verdaderas" e ii)"una de las dos, A o B, es verdadera y también una de las dos, A o C, es verdadera" son equivalentes, de lo cual podemos convencernos pensando un poco sobre ello. De forma similar podemos comprobar que se satisface la segunda ley distributiva".

"La primera de las leyes 8 dice que A es equivalente a la proposición "o bien A o bien A y B (ambas a la vez) son verdaderas", y esto es así desde el momento en que el caso en que A y B son simultáneamente verdaderas está incluído en el caso en que lo sea sólo A. En forma similar se comprueba la segun da de las leyes 8.".

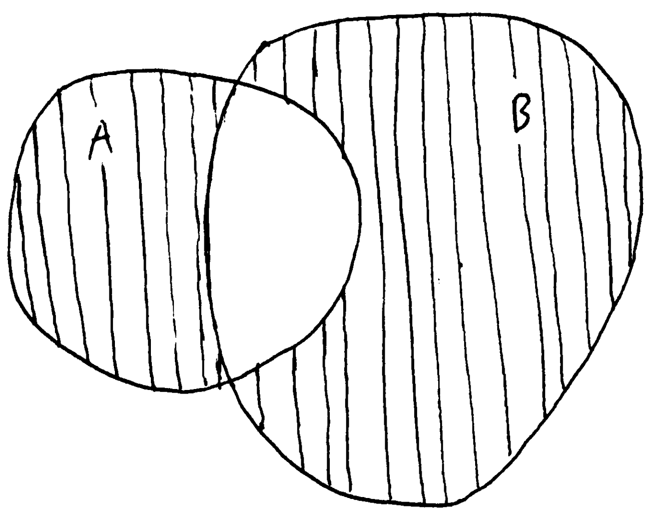
En los párrafos precedentes se refiere F. M. Hall solamente a la llamada disyunción no exclusiva, a la que hace corresponder lo que entendemos por unión en teoría de conjuntos, o sea, dados dos conjuntos A y B, $A \cup B$. Como en Derecho tiene particular trascendencia la disyunción exclusiva, he creído oportuno añadir a la precedente exposición de F.M. Hall unas breves ideas sobre la forma de relacionar también con la teoría de conjuntos esta otra modalidad de disyunción, para lo cual, y al objeto de fijar las ideas, de entre los muchos ejemplos de disyunción exclusiva que pueden extraerse del campo jurídico, he escogido los dos siguientes:

1º.- Según el artículo 1131 de nuestro Código Civil, "El obligado alternativamente a diversas prestaciones debe cumplir por completo una de éstas", de lo cual se deduce que si un deudor, D, está obligado a entregar a un acreedor, A, una determinada casa, C, o (alternativamente) un millón de pesetas, no pueden ser ciertas, a la vez, las dos proposiciones "D debe entregar a A la casa C" y "D debe entregar a

A un millón de pesetas".

2º.- Otro ejemplo podría deducirse del art. 489 bis del Código Penal español vigente, cuyo párrafo 1º dice así: "El que no socorriere a una persona que encontrare desamparada y en peligro manifiesto y grave, cuando pudiere hacerlo sin riesgo propio ni de tercero, será castigado con la pena de arresto mayor o multa de 5.000 a 10.000 pesetas".

En teoría de conjuntos, el conjunto formado por los elementos pertenecientes a uno de los conjuntos A y B, pero no a A y a B <u>a la vez</u> es $(A \cup B) - (A \cap B)$. La representación, mediante un diagrama de Venn, del conjunto así obtenido es la región rayada en esta figura:



Análogamente, en lógica proposicional, si tenemos dos proposiciones A y B, la disyunción exclusiva de las mismas será: "A o bien B, pero no A y B a la vez". En el caso del primer ejemplo que he citado sería: "D debe entregar a A la casa C o bien D debe entregar a A un millón de pesetas, pero D no debe entregar a A la casa C y (además) un millón de pesetas".

La diferencia, pues, desde el punto de vista del cálculo conjuntista, entre la disyunción exclusiva y la no exclusiva se reduce simplemente a que se quite o no la intersección de la unión, obtenidas ambas de acuerdo con los métodos operatorios de tal cálculo.

"Conjunto vacío y conjunto universal

Leyes:

El conjunto vacío suele ser designado corrientemente por ∅ y, para el presente caso, escribiremos I para indicar el conjunto universal. Recordemos que I podrá así significar indistintamente el conjunto de todos los elementos, cualesquiera que sean, o, lo que es más usual, el conjunto de todos los elementos que intervienen en un problema determinado.

9.- a) $A \cup \emptyset = A$;

b) $A \cap I = A$.

10.- a) $A \cup I = I$;

b) $A \cap \emptyset = \emptyset$."

"Tomemos cualquier proposición necesariamente verdadera como I y cualquier otra que sea falsa como $\emptyset$. Por ejemplo, I puede ser: "todos los monos son mamíferos" y $\emptyset$: "ninguna manzana contiene pepitas". Entonces una ligera reflexión nos convencerá de la validez de las leyes 9 y 10. Obsérvese que I y $\emptyset$ no son ahora proposiciones únicas, pero, sustituyéndolas por cualquier otro par de proposiciones de las características indicadas, los resultados serán lógicamente equivalentes".

"<u>Complementos</u>

Leyes:

11.- a) $A \cup \bar{A}=I$;

b) $A \cap \bar{A}=\emptyset$.

12.- $\bar{\bar{A}}=A$.

13.- a) $\bar{\emptyset}=I$;

b) $\bar{I}=\emptyset$.

Leyes de De Morgan:

14.- a) $\overline{(A \cup B)}=\bar{A} \cap \bar{B}$;

b) $\overline{(A \cap B)}=\bar{A} \cup \bar{B}$."

"Se toma $\bar{A}$ para significar la negación de A, o sea que en nuestros ejemplos $\bar{A}$ querría decír: "no todos los monos son estúpidos" o "existen algunos monos que no son estúpidos" (pero no "todos los monos no son estúpidos", lo cual significa que no hay monos estúpidos), mientras que $\bar{B}$ sería: "las manzanas no son buenas este año"."

"Las leyes 11, 12 y 13 son válidas: por

ejemplo la 11a quiere decir que la proposición "A o no A" es siempre verdadera, mientras que la 11b quiere decir que "A y no A (ambas a la vez)" nunca es verdadera".

"Fijémonos en las leyes de De Morgan. $\overline{(A \vee B)}$ significa "no A o B", lo cual equivale evidentemente a "no A y no B", o sea a $\bar{A} \wedge \bar{B}$. Análogamente $\overline{(A \wedge B)}$ significa "no A y B" y es equivalente a "no A o no B", o sea a $\bar{A} \vee \bar{B}$."

"Hemos visto que el álgebra de proposiciones que hemos dado obedece exactamente a las mismas leyes que el álgebra de conjuntos. Esto no es accidental: el razonamiento lógico utilizado es el mismo en ambos casos y este tipo de álgebra expresa ideas lógicas básicas...".

"S I L O G I S M O S.

En un silogismo tenemos como premisas dos o más proposiciones, a partir de las cuales podemos deducir una o más proposiciones consiguientes. Un sen cillo ejemplo se da a continuación".

"Ejemplo 1. Tenemos que:

a) a todos los monos les gustan los plátanos;

b) los animales a los que les gustan los plátanos tienen buena dentadura.

De ahí podemos deducir que todos los monos tienen buena dentadura".

"En este ejemplo el proceso lógico es muy fácil de seguir, pero en otros casos más complicados puede ser difícil o imposible descubrir la conclusión sin la ayuda de algún simbolismo. La teoría de conjuntos nos proporciona tal ayuda y su uso resulta muy fácil, como veremos en el ejemplo 2, tomado de la obra de Lewis Carroll "Symbolic Logic". Obsérvese que en los ejemplos que siguen las letras mayúsculas indican conjuntos (para los cuales ciertas proposiciones son verdaderas), en forma distinta a lo que ocurría antes, en que se utilizaban para indicar las proposiciones mismas".

"Ejemplo 2. Dadas las siguientes premisas, se pide hallar las conclusiones:

a) los niños son ilógicos;

b) nadie que pueda domar un cocodrilo es despreciado;

c) las personas ilógicas son despreciadas.

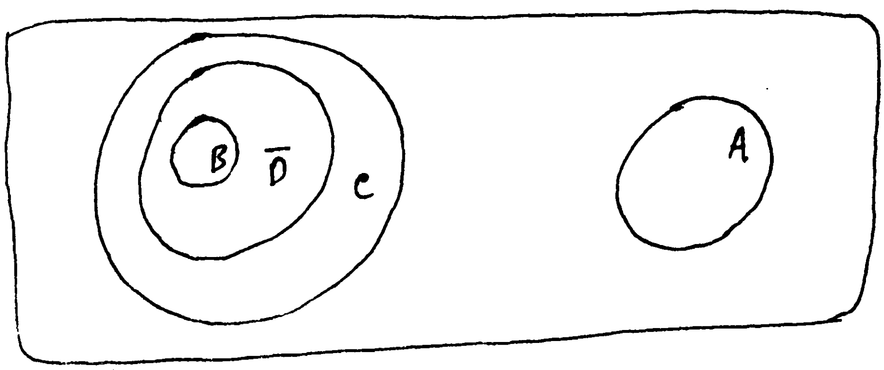
Podríamos resolver esto mediante el razonamiento ordinario, pero el método que se basa en la teoría de conjuntos es más fácil y más seguro. Llamemos: A al conjunto de personas que pueden domar un cocodrilo, B al conjunto formado por todos los niños, C al conjunto de las personas que son despreciadas y D al conjunto formado por las personas lógicas (nótese que si lo deseamos podemos tomar como conjunto universal el conjunto formado por todas las personas). Entonces:

a) puede expresarse como $B \subset \bar{D}$;

b) nos da $A \cap C=\emptyset$;

c) nos da $\bar{D} \subset C$."

"En un diagrama de Venn podemos deducir, por ejemplo, que $A \cap B=\emptyset$, o sea que los niños no pueden domar cocodrilos, y que $A \cap \bar{D} = \emptyset$ o que $A \subset D$, o sea que las personas que pueden domar cocodrilos son lógicas".



"Todos los silogismos pueden ser reducidos a este tipo de teoría de conjuntos. Podemos también por este método detectar inconsistencias en las proposiciones que tomamos como premisas, como ocurre en el ejemplo 3."

"Ejemplo 3. Veamos cómo las siguientes proposiciones son inconsistentes:

a) la fruta verde no es buena para usted;
b) todas estas manzanas son buenas para usted;
c) la fruta que ha crecido a la sombra no está madura;

d) estas manzanas no han crecido al sol.

Supongamos que:

A es el conjunto de toda la fruta que ha crecido a la sombra,

B es el conjunto de toda la fruta madura,

C es el conjunto de las indicadas manzanas,

D es el conjunto de la fruta que es buena para usted.

Entonces las proposiciones resultan ser:

a) $B \cap D=\emptyset$; $D \subset B$;

b) $C \subset D$;

c) $A \cap B=\emptyset$

d) $C \subset A$.

De ahí deducimos que $C \subset B$ y, como también tenemos $C \subset A$, resulta $(A \cap B) \supset C$, lo que contradice a c).".

Me he limitado a traducir los precedentes párrafos del indicado libro de F.M. Hall, respetando incluso los ejemplos de proposiciones y conjuntos que en el citado texto utiliza su autor, a pesar de que no puede apreciarse relación directa alguna con el Derecho en tales ejemplos. Es obvio, no obstante, que a los mismos resultados (o a resultados igualmente útiles, por lo menos, para las presentes consideraciones) se hubiera llegado tomando ejemplos extraídos del campo del Derecho. Podrían valer muy bien como tales ejemplos algunos de los usados en los manuales de iniciación a la lógica jurídica que he citado al principio del presente capítulo o de los que aparecen en otras obras similares.

Precisamente de uno de los mencionados manuales, la "Lógica del juicio jurídico" de García Máynez, voy a entresacar el desarrollo de un sencillo caso de aplicación de las tablas de verdad a la mencionada lógica jurídica, al objeto de demostrar las ventajas del cálculo conjuntista, en relación al uso de las indicadas tablas, para el tratamiento de los mismos problemas. No tiene trascendencia, para el objetivo que persigo ahora, el hecho de que el admirado profesor mejicano utilice, en lugar de los valores clásicos en tales tablas (verdadero y falso), los va lores deónticos válido (V) e inválido (I), de acuerdo con lo que, según indica el mismo García Máynez, le ha sugerido la lectura del libro "An Essay in Modal Logic" de von Wright (1), y en consonancia también con los convincentes razonamientos que desarrolla el propio García Máynez en su citado texto (2).

Así, García Máynez, basándose en que el artículo 222 del Código Penal para el Distrito y Territorios Federales de Méjico dice lo siguiente: "Comete el delito de concusión: el encargado de un servicio público que con tal carácter y a título de impuesto o contribución, recargo, renta, rédito, salario o emolumento, exija, por sí o por medio de otro, dinero, valores, servicios o cualquier otra cosa que sepa no ser debida, o en mayor cantidad de la señalada por la ley", ofrece este ejemplo de implicación ex-

---

1) García Máynez, Lógica del juicio jurídico, pág. 139, nota 27.

2) García Máynez, Lógica del juicio jurídico, págs. 137 y sigs.

tensiva: "Si un sujeto <u>x</u> comete el delito de concusión, ese sujeto tiene a su cargo un servicio público". A continuación añade: "En otras palabras: el que una persona sea penalmente responsable de aquel delito, <u>en todo caso implica</u> que está encargada de un servicio público" (1).

Posteriormente (2) va llegando a las conclusiones que transcribo a continuación, de acuerdo con la tabla de verdad (de validez, en el presente caso) que corresponde a la indicada implicación y que copio asimismo:

"

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	I	I
I	V	V
I	I	V

"

1) García Máynez, Lógica del juicio jurídico, pág.136.

2) García Máynez, Lógica del juicio jurídico, págs. 140 y sigs.

"En el caso del ejemplo habrá que declarar, por ende: si el juicio "*x* es penalmente responsable del delito de concusión" es válido, y "*x* tiene a su cargo un servicio público" también es válido, la implicación "si *x* es penalmente responsable del delito de concusión, *x* tiene a su cargo un servicio público" es igualmente válida".

....

"...podremos decir:

1) Si p y q son ambos válidos, el juicio $p \rightarrow q$ es igualmente válido (o, en otros términos, la implicación queda confirmada).

2) Si p es válido (es decir, si *x* es penalmente responsable del delito de concusión) y q es inválido (lo que ocurriría en el supuesto de que *x* no estuviese encargado de un servicio público), $p \rightarrow q$ carecería de validez, ya que se habría demostrado que es posible cometer el hecho definido por el artículo 222 del Código Penal sin estar encargado de un servicio público.

3) Si p es inválido y q es válido, el juicio hipotético "si p, entonces q" conserva su validez...

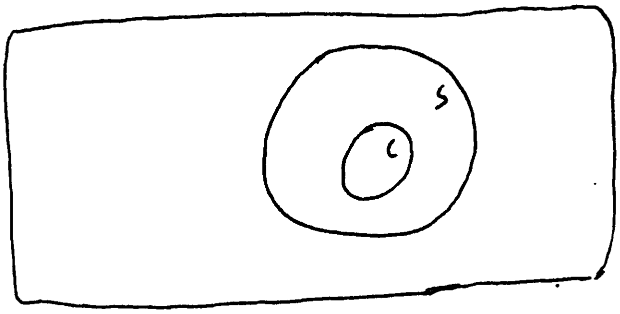
4) Por último, si tanto p como q son inválidos, la implicación no queda refutada...".

Tanto de la simple observación de la tabla como de la aplicación concreta de dicha tabla por parte de García Máynez al ejemplo propuesto por el mismo autor se deduce claramente la diferencia que existe entre el valor a asignar al símbolo "V" en la última casilla de la primera fila y el valor que debe ser asignado al mismo símbolo en las dos últimas casillas de la tercera columna. Así, mientras en el primer caso se trata de una implicación que forzosamente <u>debe ser</u> válida al estar en vigor el artículo 222 del indicado Código mejicano, en los otros dos casos sólo se observa que la correspondiente implicación <u>puede ser</u> válida, o sea que no existe obstáculo para su validez. Es evidente, asimismo, la importancia que, cuando se trata de aplicar a conceptos y razonamientos típicamente jurídicos los métodos operatorios de la lógica simbólica, debe serle asignada a la posibi lidad de distinguir fácil e inequívocamente, a lo lar go de todo el proceso operatorio, qué símbolos corres ponden al concepto "debe ser" y cuáles al concepto "puede ser".

Si tratamos de desarrollar el mismo ejemplo de acuerdo con los métodos del cálculo conjuntista, designando, por ejemplo, por C al juicio "*x* es penal mente responsable del delito de concusión" y por S al juicio "*x* tiene a su cargo un servicio público", tendremos:

$$C < S; \quad C \cap S = C$$
$$C \nless \overline{S}; \quad C \cap \overline{S} = \emptyset$$
$$\overline{C} \nless S; \quad \overline{C} \cap S = S - C$$
$$\overline{C} \nless \overline{S}; \quad \overline{C} \cap \overline{S} = \overline{S}.$$

Podemos dibujar asimismo el correspondiente diagrama de Venn:



La diferencia entre la parte final de las filas primera y tercera, por ejemplo, es ahora evidente:

1. $C \cap S = C$

mientras que: 3. $\overline{C} \cap S = S - C$.

<u>Puede ser</u> $S - C \neq \emptyset$, y así está dibujado en el diagrama.

La traducción de estas fórmulas al lenguaje corriente es igualmente sencilla y expresa la realidad de los hechos sin ambigüedad alguna. Podría ser ésta, por ejemplo:

1.- Los individuos que son penalmente responsables del delito de concusión y tienen a su cargo un servicio público son concusionarios.

3.- Pueden existir individuos que no sean penalmente responsables del delito de concusión y tengan a su cargo un servicio público.

Todo ello, naturalmente, sin que deje de ser válida la implicación de partida $C \subset S$, o sea:

"si x es penalmente responsable del delito de concusión, x tiene a su cargo un servicio público", ya que de tal implicación se han ido deduciendo todas las relaciones que le siguen.

Para el precedente ejemplo, en el que se trata únicamente de relacionar en forma muy simple dos juicios, nos ha sido suficiente utilizar una tabla también muy sencilla. Al tratar de expresar simbólicamente -en las mismas tablas o fuera de ellas- los razonamientos que corresponden a la confección correcta de tablas (de verdad o de validez) más complicadas -cuando de lo que se trata es de relacionar más de dos juicios (o proposiciones) o bien surgen relaciones más complejas entre dos juicios únicos, por ejemplo- van apareciendo también, progresivamente, nuevas y mayores dificultades, en cuyo tratamiento puede observarse asimismo con mayor amplitud la utilidad de los métodos calculatorios extraídos de la teoría de conjuntos.

Por otra parte, como he indicado ya, en la aplicación del cálculo conjuntista, no tiene trascendencia el que los valores contrapuestos sean "verdadero" y "falso" o "válido" e "inválido"; podrían apli carse igualmente los mismos métodos de cálculo si los valores contrapuestos fuesen "justo" e "injusto", "lí cito" e "ilícito" u otros cualesquiera entre los que los principios de contradicción y del "tertium non datur" prevalezcan, bien por su propia naturaleza o bien porque los hagamos prevalecer como condición ini cial.

Puede resultar útil también, en la aplicación de los indicados métodos calculatorios tanto a la lógica deóntica como a la lógica y a la metodología específicamente jurídicas, relacionar diversos pares de valores contrapuestos que cumplan -cada uno de dichos pares- la condición indicada. Por ejemplo, si admitimos que no son sinónimas las palabras "justo" y "legal", siendo "J", justo, y "L", legal, tendremos que, mientras siempre será $J \cap \bar{J}=\emptyset$ y $L \cap \bar{L}=\emptyset$, podrá ser, en cambio, $L \cap \bar{J} \neq \emptyset$. Podemos llamar ahora, por ejemplo, "D" a $L \cap \bar{J}$ y utilizar este símbolo "D", con dicho significado, para operaciones sucesivas.

Con vistas a la determinación eficaz de esos pares de valores -o de conceptos- contrapuestos relacionados con la lógica deóntica, o con la lógica o la metodología jurídicas, a los que me he referido en el párrafo anterior, es evidente, por otra parte, la utilidad de las ideas de Blanché sobre "oposición de conceptos" que he mencionado en el capítulo primero del presente trabajo y, particularmente, la adaptación de tales ideas a la lógica deóntica a través de esa distribución de los seis functores básicos para el desarrollo de tal lógica que he reproducido también en el citado capítulo.

3. Estructuras algebraicas, Lógica y Derecho.

Volviendo ahora a la consideración de las estructuras algebraicas -y, sobre todo, de la estructura de grupo, prototipo de las mismas- que he iniciado y desarrollado, respectivamente, en los capítulos segundo y cuarto del presente trabajo, y de acuerdo asimismo con lo que he anunciado en el último de los mencionados capítulos, trataré de ofrecer a continuación unas breves ideas sobre la trascendencia que, en relación con el tema específico al que está dedicado el presente, reviste el descubrimiento y utilización de determinadas estructuras de grupo e, incluso, de alguna otra estructura algebraica que, aun sin ser un grupo, ha adquirido una importancia evidente en la lógica de nuestros días.

Al objeto de destacar, pues, en primer lugar, tanto la importancia del "reconocimiento de una estructura de grupo" como la del "trabajo del matemático", consistente en la "creación de los conjuntos de estructura deseada, simbolización y simplificación de esta simbolización para facilitar su empleo", transcribo a continuación los siguientes párrafos originales de Lucienne Félix:

"El reconocimiento de una estructura de grupo permite cálculos análogos a los cálculos numéricos; por consiguiente, cuando se define una operación en un conjunto, la primera pregunta que se plantea es: "¿Se trata de un grupo?". Citemos, como ejemplo muy elemental, el conjunto de las translaciones para la operación de <u>composición</u> de transformaciones. Este conjunto es, por lo demás, un <u>subgrupo</u>... del grupo

$\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ reunión del conjunto de las homotecias $\mathcal{H}$ y de las traslaciones $\mathcal{T}$. El conjunto de las traslaciones es también un subgrupo del grupo de los movimientos".

"La imperiosa necesidad de utilizar grupos cuando se define una operación sobre un conjunto induce, cuando esto es posible, a asegurar esa estructura por medio de una <u>extensión.</u> Expliquemos esto con el más fundamental ejemplo: el pasaje del conjunto N de los enteros naturales (positivos) al conjunto Z de los enteros relativos (positivos o negativos)".

"<u>Creación del grupo aditivo Z.</u> En N toda adición es realizable, pero sólo son posibles algunas sustracciones: el conjunto no es bastante rico. Crearemos otro conjunto Z, más rico, en el que todas las sustracciones sean realizables. A todo elemento $a \in N$ se asocian dos elementos a' y a", y se crean las reglas de la nueva operación $*$ por analogía con la adición + definida en N. Creamos también un elemento neutro, cero, denotado 0."

"Este cero es definido por:

$$\forall x \in N,\ x'*x''=x''*x'=0 \quad y \quad \left(\begin{array}{l} 0*0=0 \\ x'*0=0*x'=x' \\ x''*0=0*x''=x''.\text{"} \end{array}\right.$$

"A la adición a+b=c en N, asociamos $a'*b'=$ $=c'$."

"La asociatividad permite descubrir las reglas siguientes de operación al "estrellar" a derecha o a izquierda los dos miembros de las igualdades como si se sumara;

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{a'*b'=c'} \arrow[dl, Rightarrow, "(a''*)"'] \arrow[d, Rightarrow, "(*b'')"] & \\
\boxed{b'=a''*c'} \arrow[d, Rightarrow, "(*c'')"] & \boxed{a'=c'*b''} \arrow[d, Rightarrow, "(c''*)"] & \\
\boxed{b'*c''=a''} & \boxed{c''*a'=b''} \arrow[r, Rightarrow, "(*a'')"] & \boxed{c''=b''*a''}.\text{"}
\end{tikzcd}$$

"Pero, en N, la adición + no sólo es asociativa, sino también conmutativa: c=a+b=b+a, propiedad que se transmite a la operación definida en Z."

"Por último, podemos afirmar que Z tiene estructura de grupo para la operación *. Adoptamos entonces una serie de convenciones; la operación en Z será llamada "adición" y el signo * será reemplazado por + (más) como en N. Utilizamos además + y también - para denotar a' y a". (Así, al número natural 3, se asocian +3 y -3). Y, finalmente, reemplazamos:

$$(+5)+(-2)=(+3) \text{ por } 5-2=3$$
$$(+5)+(-7)=(-2) \text{ por } 5-7=2."$$

....

"Vemos aquí, "en vivo", el trabajo del matemático: creación de los conjuntos de estructura deseada, simbolización y simplificación de esta simbolización para facilitar su empleo" (1).

A pesar de la trascendencia que en el desarrollo de la aplicación de los métodos algebraicos a

---

1) Lucienne Félix, Matemática moderna, traducción citada, págs. 57 y 58.

la lógica actual tiene que revestir presumiblemente asimismo la consideración de la estructura de grupo, esa "álgebra de conjuntos" a la que, como dice Hall, puede ser reducida una gran parte del razonamiento lógico ordinario se nos presenta sistematizada a base de estructuras algebraicas que no son precisamente grupos. Puede comprobarse con facilidad la afirmación precedente teniendo en cuenta que, como operaciones básicas, utilizamos, en la indicada "álgebra de conjuntos", la unión y la intersección, y que, si consideramos, por ejemplo -para citar un caso que es, a la vez, el más simple y el más útil en las presentes circunstancias-, un conjunto universal constituído por un único conjunto I (y, naturalmente, por su complementario, el conjunto vacío), tendremos, para la unión:

$$I \vee I=I; \quad I \vee \emptyset=I; \quad \emptyset \vee I=I; \quad \emptyset \vee \emptyset=\emptyset.$$

Las precedentes operaciones suelen expresarse, mediante una tabla de doble entrada, así:

$\cup$	$\emptyset$	I
$\emptyset$	$\emptyset$	I
I	I	I

Análogamente, para la intersección tendremos:

$\cap$	$\emptyset$	I
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
I	$\emptyset$	I

Se observa fácilmente ahora que, en ninguno de los dos casos, corresponde un elemento recíproco a cada uno de los elementos I y $\emptyset$.

A pesar de que nos veamos precisados a utilizar estructuras algebraicas que no son grupos en su fundamentación y desarrollo, no obstante, son innegables el valor y la utilidad de esa "álgebra de conjuntos" a la que me vengo refiriendo (como son innegables también el valor y la utilidad de la simple adición en el conjunto N de los enteros naturales de que nos habla Lucienne Félix en sus párrafos transcri tos). Ese valor y esa utilidad de la mencionada "álgebra de conjuntos" adquieren particular relieve en la lógica y en la metodología jurídicas debido a la circunstancia de ser aplicable esa misma álgebra en todos aquellos casos en los que utilizamos pares de valores o de conceptos contrapuestos entre los que prevalezcan los principios de contradicción y del "tertium non datur" como he destacado ya anteriormente. Pero es que, además, si, teniendo en cuenta las ventajas que la utilización de grupos podría reportar en Lógica (análogamente a lo que viene ocurriendo en Matemáticas), nos proponemos adaptar los cálculos lógicos de naturaleza algebraica a la indicada estructura algebraica fundamental, entiendo que precisamente en el campo específico del Derecho puede muy bien encontrarse una base para ello. Para formular la afirmación precedente he tenido en cuenta las circunstancias que a continuación expongo:

En primer lugar, el hecho de que si, en los procesos operatorios propios de la teoría de conjuntos que venimos desarrollando en el presente capítulo utilizamos, dados, por ejemplo, dos conjuntos, A y B, no la unión ni la intersección entre ellos, sino la diferencia entre ambas, o sea, introduciendo para expresar abreviadamente tal diferencia el símbolo $\triangle$, $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$, podremos observar la existencia de un elemento neutro y de un elemento recíproco de cada uno de los que utilicemos (pudiendo comprobarse asimismo fácilmente en este caso las demás condiciones características de la estructura de grupo). Así, considerando, como hemos hecho antes, un conjunto universal constituído por un único conjunto, I, tendremos ahora la tabla siguiente:

$\triangle$	$\emptyset$	I
$\emptyset$	$\emptyset$	I
I	I	$\emptyset$

En dicha tabla se ve con claridad que el elemento neutro es $\emptyset$ y que el recíproco de I es el propio I (naturalmente, el recíproco de $\emptyset$ es también el propio $\emptyset$). Las otras condiciones características de la estructura de grupo -el hecho de que, al relacionar dos elementos del conjunto dado mediante la operación que define al grupo que estemos consideran do, se obtiene otro elemento del mismo conjunto y la asociatividad-, así como el carácter de grupo abelia no, incluso, del grupo al que me vengo refiriendo, pueden deducirse también fácilmente de la observación de esta misma tabla.

Al relacionar, asimismo, por medio de la operación Δ, dos conjuntos cualesquiera, A y B, po demos construir la siguiente tabla:

Δ	$\emptyset$	A	B	$A \Delta B$
$\emptyset$	$\emptyset$	A	B	$A \Delta B$
A	A	$\emptyset$	$A \Delta B$	B
B	B	$A \Delta B$	$\emptyset$	A
$A \Delta B$	$A \Delta B$	B	A	$\emptyset$

Si los dos conjuntos, A y B, son disjuntos y la unión de ambos es un conjunto universal I, será $B=\bar{A}$. En este caso la correspondiente tabla quedará así configurada:

Δ	$\emptyset$	A	$\bar{A}$	I
$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\bar{A}$	I
A	A	$\emptyset$	I	$\bar{A}$
$\bar{A}$	$\bar{A}$	I	$\emptyset$	A
I	I	$\bar{A}$	A	$\emptyset$

De la observación de estas dos últimas tablas puede deducirse también la existencia, en cada uno de los casos considerados, de un grupo abeliano cuyos elementos son los conjuntos que intervienen en la formación de la correspondiente tabla.

Teniendo en cuenta ahora, por una parte, esa analogía que he destacado antes entre la operación Δ y la disyunción exclusiva, y, por otra, la particular trascendencia, a la que me he referido también, de dicha disyunción exclusiva en el campo específico del Derecho, se llega forzosamente, a mi modo de ver, a la conclusión de que, en efecto, en el campo específico del Derecho puede muy bien encontrarse una base para la adaptación a la estructura de grupo de los cálculos lógicos de naturaleza algebraica.

Fundamental para el estudio de los procesos de razonamiento en general, ya que, oomo dice de él Piaget, "gobierna las operaciones proposicionales" (1), y particularmente interesante asimismo cuando de lo que se trata es de utilizar esos procesos de razonamiento en el campo específico del Derecho como vamos a ver seguidamente, es el conjunto $\{I, N, R, C\}$, que podemos formar, utilizando la implicación material (o sea, el condicional) y la negación, de la siguiente manera:

Dadas dos proposiciones, p y q, denominamos <u>transformación idéntica o identidad</u> y designamos mediante el símbolo "I" a la implicación material "si p entonces q", o sea, también simbólicamente, "$p \rightarrow q$".

Introducimos entonces:

"$p \wedge \neg q$", que denominamos <u>inversa</u> de I y designamos mediante el símbolo "N".

---

1) Piaget y Beth, obra y traducción citadas, pág. 227, nota.

"$q \rightarrow p$", que denominamos __recíproca__ de I y designamos mediante el símbolo "R".

"$q \wedge \neg p$", que denominamos __correlativa__ de I y designamos mediante el símbolo "C".

Utilizando el signo * en vez de la palabra "de" podemos escribir, más abreviadamente:

I*I=I; N*I=N; R*I=R; C*I=C.

Si partimos ahora de R como transformación idéntica, tendremos, conservando con el mismo sentido los símbolos que venimos utilizando:

N*R=C; R*R=I; C*R=N.

Mediante la utilización de esta misma operación *, y recurriendo a cálculos lógico-matemáticos de naturaleza más compleja, pueden deducirse asimismo otras relaciones entre los elementos del conjunto $\{I, N, R, C\}$, y tomando esa operación * como operación que define una estructura algebraica en dicho conjunto $\{I, N, R, C\}$ pueden irse también deduciendo y analizando, consecuentemente, las características de tal estructura algebraica.

Al escribir, por otra parte, "si p entonces q" -o bien, simbólicamente, ahora, "$p \rightarrow q$"- podemos pretender, desde luego, manifestar gráficamente, utilizando el concepto "verdadero", que si la proposición "p" es verdadera entonces también es verdadera la proposición "q". Pero, en determinados casos, ese concepto "verdadero" puede ser sustituído por algún otro concepto que nos interese utilizar al considerar algún problema concreto de naturaleza específicamente jurídica: así, por ejemplo, utilizando el concepto "permitido", "si p entonces q" significará "si p está permitido entonces también q está permitido". Puede formarse asimismo, como es natural, también ahora, de acuerdo con el mismo proceso que he expuesto anteriormente, el conjunto $\{I, N, R, C\}$, pudiéndose relacionar entre sí los elementos de este conjunto mediante la misma operación $*$ utilizada antes para ello y deducir y analizar las características de la estructura algebraica que esa operación $*$ define en el conjunto $\{I, N, R, C\}$ mencionado últimamente.

No ignoro, desde luego, que sobre las relaciones con el Derecho de la denominada "álgebra de la lógica" es posible -e incluso necesario y urgente- escribir muchas cosas más. Teniendo en cuenta, no obstante, el carácter de iniciación, formalmente simple y elemental, de este trabajo, por una parte, y la naturaleza más genérica del tema al que está dedicado, por otra, no he creído oportuno profundizar más en el aspecto del mencionado tema al que me vengo refiriendo en este capítulo ni dedicar tampoco a las consideraciones relativas a tal aspecto una extensión que pudiera resultar desproporcionada en relación con la de otras partes de dicho trabajo dedicadas a aspectos también interesantes del tema genérico del mismo. Espero, además, que, incluso sin más fundamento que las breves noticias y consideraciones sobre las conexiones del Derecho con el "álgebra de la lógica" que he ido ofreciendo a lo largo del presente capítulo, pueda percibirse claramente la trascendental importancia que a las estructuras algebraicas en general, y a la estructura de grupo en particular, debe serles asignada tanto en la búsqueda de una eficaz matematización de las normas y de la diná mica normativa como en todo el proceso de adecuación de la lógica y la metodología jurídicas a los métodos actuales de pensamiento.

\- - -

C A P I T U L O VII.- ESTRUCTURAS TOPOLOGICAS

1. Las estructuras topológicas.

Las estructuras topológicas, como he dicho ya en el capítulo II de este mismo trabajo, se derivan de las ideas intuitivas de "proximidad" y de "continuidad". El estudio riguroso, sobre una base racional y de acuerdo con principios y métodos lógico-matemáticos, de este tipo de estructuras corresponde a una rama fundamental de la Matemática: la topología. "La topología es" -como dice Lucienne Félix- "la ciencia que proporciona una configuración matemática a las nociones intuitivas que se traducen por "ser vecino", "ser poco diferente", "tender hacia" y que se introducen obligatoriamente en física como consecuencia de la aproximación de las medidas y en geometría con la noción intuitiva de continuidad" (1). Aunque,

1) Lucienne Félix, Exposé moderne des mathématiques élémentaires, París, 1966, pág. 60.

como dice asimismo dicha autora, "...los matemáticos adoptaron sistemas de axiomas que permiten definir la continuidad independientemente de toda noción de distancia" (1), entiendo que tal "noción de distancia" ha de resultar muy útil para desarrollar algo más las precedentes ideas, aunque sólo sea a través de un sencillo ejemplo de conjunto dotado de una estructura del tipo que venimos considerando. El ejemplo que he escogido para el indicado fin es el "espacio métrico", en el que la distancia se define como un número real no negativo, d, asociado a cualquier par de elementos, distintos o no entre sí, del mencionado espacio métrico; simbólicamente, si llamamos E al espacio métrico y x e y a los citados elementos del mismo, la distancia asociada a dicho par se representa así: d(x,y). Además se verifica, siendo x, y y z elementos cualesquiera de E:

---

1) Lucienne Félix, Matemática moderna, traducción citada, pág. 81.

1º.- $d(x,y) > 0$ si y sólo si $x \neq y$.

2º.- $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

3º.- $d(x,y) = d(y,x)$.

4º.- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Siendo a un número real positivo y b un elemento de E se llama bola de centro b y radio a al conjunto formado por los elementos, x, pertenecientes a E y tales que $d(x,b) < a$. Del indicado concepto de "bola de centro b y radio a" puede derivarse el estudio de la continuidad del espacio E.

En el ejemplo expuesto se puede observar como para definir una estructura topológica nos ha sido preciso recurrir a los otros dos tipos de estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático: así, hemos recurrido a las estructuras de orden al utilizar los signos $>$, $=$ y $<$, y a las algebraicas al escribir simbólicamente la suma de dos números reales $-d(x,y)+d(y,z)-$. Esta necesidad de recurrir a los otros dos tipos de estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático en el presente caso no constituye una excepción, sino todo lo contrario: es corrien te que no puedan aislarse las estructuras topológicas de las de orden ni de las algebraicas; entiendo, no obstante, que los tres mencionados tipos de estructuras quedan, por su propia naturaleza, perfectamente diferenciados, por lo que, aun sin dejar de reconocer, como he indicado antes, las indudables conexiones de las estructuras topológicas con las algebraicas, me pareció extraño que Gibaud encontrara "pocas razones para distinguir de hecho" estos dos tipos de estructuras (1).

---

1) Su opinión en el sentido indicado la expuso Gibaud en el transcurso de un coloquio que, sobre el término "estructura", en relación con la redacción del "Diccionario Terminológico de las Ciencias Sociales", patrocinado por la UNESCO, tuvo lugar en París en enero de 1959. Un informe sobre dicho coloquio fue publicado, conjuntamente con varios trabajos relacionados con el indicado término "estructura", bajo el título original "Sens et usages du terme structure dans les sciences humaines et sociales". Una versión castellana, a cargo de Beatriz Dorriots y Guillermo Maci, de la indicada obra conjunta fue publicada asimismo en Buenos Aires, en 1968, con el título "Sentidos y usos del

Al hablar de vecindad y de distancia -en los casos en que el concepto de distancia se utiliza- en la definición de estructuras topológicas no nos referimos necesariamente a vecindad y a distancia en un sentido geométrico o físico. Así, por ejemplo, en el análisis de las relaciones lógicas entre las nociones de obligación y compromiso, que constituye una parte fundamental de la lógica deóntica y cuya trascendencia en el campo específico del Derecho es también evidente, se recurre a los conceptos de "distancia deóntica entre situaciones morales" y de "vecindad". Entonces se dice que dos "situaciones morales" son semejantes en algún grado si la "distancia deóntica" entre ellas es finita, y una "vecindad" de una determinada situación moral, m, es un conjunto, V, de situaciones morales posibles, tales que cada una de ellas tiene alguna semejanza con m. Resulta evidente la afinidad entre el conjunto V del presente ejemplo y el conjunto al que hemos asignado la denomina-

---

término estructura en las ciencias del hombre". Las citadas palabras de Gibaud pueden verse en la página 119 de esta edición argentina.

ción de "bola" en el ejemplo de conjunto dotado de una estructura topológica -el "espacio métrico"- expuesto con anterioridad; a partir de la afinidad citada, asimismo, se pueden seguir deduciendo conexiones entre la lógica deóntica y la topología (1).

En cuanto a las relaciones de la topología tanto con los métodos que, en un sentido más genérico, se utilizan en la lógica actual -y, en particular, con el método de los cuadros semánticos- como con lo que Piaget llama "problemas psicológicos generales del pensamiento lógico-matemático", se han ocupado de ellas el propio Piaget y Beth en su obra "Episte-

---

1) En relación con las conexiones entre la lógica deóntica y la topología que se derivan del análisis de las relaciones lógicas entre obligación y compromiso y, particularmente, de los conceptos de "semejanza entre situaciones morales", "distancia deóntica" y "vecindad" utilizados en dicho análisis, puede verse el trabajo de Segerberg Some logics of Commitment and obligation, publicado en "Deontic Logic. Introductory and systematic readings", Dordrecht, 1971.

mologie mathématique et psychologie. Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée reelle" a la que me he referido ya anteriormente. Así, en la citada obra, Beth, tras haber dedicado dos apartados de la misma a "La sintaxis y la semántica" y "El método de los cuadros semánticos", respectivamente, en el párrafo final del siguiente, cuyo título es "Concepciones algebraicas y topológicas", define unos espacios topológicos, a los que llama "espacios topológicos M", que relaciona con los subcuadros de un cuadro semántico, considerando "series de subcuadros encajados sucesivamente como si fuesen los "puntos" de cierto espacio, M, en el que los entornos estuviesen formados por subcuadros", llegando a la conclusión de que "cabe entonces entender cierto número de teoremas lógicos como manifestaciones de ciertas propiedades de los espacios topológicos M" (1). Piaget, por su parte, y refiriéndose al "primado de la topología en la geometría del niño" (aunque es obvio

1) Piaget y Beth, obra y traducción citadas, pág.110.

que el alcance de estas consideraciones de Piaget es mucho más amplio), dice lo siguiente:

"Si se quiere hacer un inventario de las operaciones lógico-matemáticas de los sujetos al nivel de las operaciones concretas, y reconstruir su formación desde los comienzos de la representación, se comprueba... que, además de las acciones y operaciones referentes a objetos discretos consistentes en reunirlos, ordenarlos, etc., existen otras relativas a la descomposición y recomposición de los objetos mismos, en cuanto totalidades en bloque: son las operaciones relativas al espacio y el tiempo. Y se plantea la cuestión de saber si son las mismas operaciones anteriores, aunque, simplemente, aplicadas a lo contínuo, o si conllevan caracteres irreductibles; dicho de otro modo, si el espacio y lo contínuo no constituyen sino un contenido nuevo al que se apliquen las mismas operaciones, o si se trata de operaciones propiamente constituyentes del espacio (de modo que éste no se reducirá a las meras percepciones), que, por consiguiente, engloben lo contínuo en su propia forma, y no simplemente como materia".

"Si inicialmente no atendemos más que a la enseñanza escolar de la geometría, podremos pensar que, una vez en posesión de cierta lógica y cierta aritmética, el niño las aplicará sin más a las figuras perceptivas; y de esta suerte la geometría no constituiría más que una matemática aplicada, en el sentido en que se la ha concebido durante largo tiempo en el campo mismo de la ciencia. Pero el niño posee o elabora una geometría con sus acciones, mucho antes de someterse a enseñanza alguna; y la primera cuestión que hay que examinar es la de saber si esta construcción espontánea ofrece un orden más cercano al orden de la adquisición histórica (geometría euclídea para comenzar, luego proyectiva y, finalmente, topológica), o al de la construcción teorética (primeramente la topología, luego paso a la métrica euclídea a través de la métrica general, o bien paso a las transformaciones proyectivas, luego a las afines y después a las semejanzas y a los desplazamientos con conservación de las distancias)..."

"Ahora bien, la observación y la experiencia muestran lo que sigue:

1) Mucho antes de constituirse los invariantes relativos a los desplazamientos... y los relativos a las transformaciones proyectivas (recta proyectiva o puntual), se observan ciertos invariantes cualitativos referentes a los entornos, a las aperturas y cierres, a los cubrimientos (interioridad, exterioridad y frontera), a lo continuo y lo discontinuo, al orden concebido como composición de entornos y de separaciones (con la relación "entre"), etc...

2) Los invariantes de la métrica euclídea se construyen en el mismo nivel (hacia los siete a ocho años) que los invariantes proyectivos y que las afinidades -conservación de las paralelas en las transformaciones afines del rombo- y semejanzas.

3) La construcción de los sistemas naturales de coordenadas (con un eje horizontal y otro vertical), que señala el momento en que se terminan las operaciones concretas espaciales (hacia los nueve a diez años, no antes) se sincroniza con la coordinación de las perspectivas o de los puntos de vis

ta (con relación a dos o tres objetos, y no ya a uno sólo)".

"En resumen, la construcción espontánea del espacio representativo del niño -no el perceptivo- parece encontrarse más cercana a los pasos propios de su construcción teorética que al orden histórico de los descubrimientos geométricos...".

"Así, pues, no es exagerado suponer que, junto a las estructuras cuya reversibilidad pertenece a los tipos de la inversión o la reciprocidad (y de las cuales queremos saber si prefiguran, respectivamente, las estructuras algebraicas y las de orden), es preciso distinguir a todos los niveles elementales un tercer tipo de estructuras, cuyas características iniciales son esencialmente topológicas y cuyas combinaciones con aquellas otras dan origen a estructuras espaciales más complejas (la medida, etc.)".(1).

---

1) Piaget y Beth, obra y traducción citadas, págs. 228 y sigs.

Al ocuparse Piaget, por otra parte, de "la sociología y la psicología social, dos disciplinas cuyas fronteras" -como dice también Piaget- "se van desvaneciendo (como ocurre con todas las que persisten en su afán de anteponer un deseo de autonomía profesional a la naturaleza de las cosas)" (1), destaca dicho autor la relación de la topología con las indicadas disciplinas. Así, refiriéndose a las iniciativas de Lewin, el cual edificó, como afirma asimismo Piaget, en colaboración con "sus discípulos (Lippitt, White y, a partir de la escuela de Berlín, Dembo, Hoppe y, sobre todo, Zeigarnik)", "mediante métodos puramente estructuralistas", "una psicología social y afectiva que se desarrolló ampliamente en los Estados Unidos y fué una de las fuentes principales de las múltiples investigaciones actuales sobre la "dinámica de grupos"..." (2), dice Piaget lo siguiente:

---

1) Piaget, Le structuralisme, ed. cit., pág. 83.

2) Piaget, Le structuralisme, ed. cit., págs. 84 y 85.

"...Lewin propone, para el análisis de las relaciones afectivas y sociales, la noción de "campo total", que engloba al sujeto con sus querencias y sus necesidades. Pero éstas no son sólo internas, y, según la configuración del campo y, en particular, según la "proximidad" de un objeto, este último da lugar a unas solicitaciones ("Aufforderungscharakter") que ponen de manifiesto la interacción total de los elementos presentes. Luego, inspirándose en la topología, Lewin analiza su campo total hablando de vecindades y separaciones, fronteras (incluyendo las "barreras psíquicas" o inhibiciones y prohibiciones de todo género),..., etc.: topología desgraciadamente poco matemática, en el sentido de que no se encuentran en ella teoremas conocidos aplicables sin más al "campo total", pero auténtica topología, decididamente, en el sentido de un análisis espacial puramente cualitativo con sus intuiciones centrales de composición..." (1).

---

1) Piaget, Le structuralisme, ed. cit., pág. 84.

Sobre la trascendencia de la percepción, por parte de la inteligencia humana, de estructuras topológicas, y sobre la problemática que plantea la búsqueda de unos métodos precisos de comunicación de la percepción indicada (problemática cuyo estudio viene siendo abordado con creciente interés por la lingüística estructural), entiendo que son suficientemente significativas las siguientes palabras de Hilton:

"No es necesario seguir a PIAGET hasta el final para admitir que las propiedades topológicas figuran entre las más inmediatamente aprehendidas por nuestra inteligencia, abierta al mundo experimental a través de nuestros sentidos. Es relativamente poco importante que un determinado rectángulo sea, en realidad, un cuadrado. En cambio, nos llama inmediatamente la atención el hecho de que, por supresión de una de sus partes, un espacio deje de ser conexo. Y aunque permanezca conexo, la existencia de agujeros en ese espacio retiene al instante nuestra atención y suscita nuestro interés. Una orientación reciente, en el sentido que nos ocupa, de la lingüística estructural pone de manifiesto como "verbos de acción" fundamentales...: "partir", "parar", "cortar", "encontrar", "dar", "tomar", "cruzar", "cambiar"..., etc. Así, pues, la topología está bien enlazada con el mundo físico y busca respuestas a las cuestiones que se nos manifiestan importantes, tangibles y naturales..." (1).

Ese enlace -o conexión- de la topología con el mundo físico a que alude Hilton tiene particular trascendencia cuando en los fenómenos procedentes del mundo físico que se consideran interviene el tiempo. De nuestra percepción del tiempo, que, como decía Newton, "fluye continua y uniformemente", se derivan con frecuencia esas ideas intuitivas de "proximidad" y "continuidad" a las que me he referido al iniciar en el presente trabajo el análisis de las estructu-

---

1) Hilton y Matthys, Le langage des catégories. Edición francesa en la que los capítulos originales de Hilton han sido traducidos por Matthys, Lyon, 1973, pág. 66.

ras topológicas. La trascendencia de la consideración del tiempo puede observarse asimismo, en el desarrollo de la topología, al introducir el concepto de *homotopía*, por ejemplo. "El concepto de homotopía" -dice Matthys- "traduce matemáticamente la noción intuitiva de *deformación continua sujeta a determinados vínculos*" (1) y resulta difícil concebir esa "noción intuitiva de deformación continua" sin asociar tal deformación al transcurso del tiempo.

También con vistas a la consideración de estructuras topológicas en el campo específico del Derecho el transcurso del tiempo tiene una importancia fundamental. Salta a la vista, en efecto, esta importancia si nos fijamos, por ejemplo, en la que tiene la *prescripción* en sus distintas modalidades y en las diversas ramas del Derecho. Así, si, para fijar las ideas, en el par $\langle d,p \rangle$, al que me he referido, como ejemplo de par ordenado, en el capítulo III

---

1) Hilton y Matthys, obra y edición citadas, pág. 105.

del presente trabajo, consideramos como elemento *d* la *comisión* del delito y como elemento *p* el *cumplimiento* de la pena, la existencia del conjunto $\langle d,p \rangle$ se verá afectada al suprimirse del mismo el elemento p debido a lo dispuesto sobre prescripción de penas en el artículo 115 de nuestro Código Penal. Esta disposición legal, por otra parte, no afecta para nada a la propia estructura de orden del conjunto $\langle d,p \rangle$, como ocurriría, por ejemplo, si se pretendiese que el cumplimiento de la pena debiera ser anterior a la comisión del delito, sino que afecta específicamente a la estructura topológica del indicado conjunto: lo que ocurre ahora es que, según lo dispuesto en el citado artículo de nuestro Código Penal, entre la comisión del delito y el cumplimiento de la pena debe darse una cierta continuidad, o existir una cierta proximidad, de carácter temporal, o bien, utilizando otros términos, corrientes asimismo en topología, que el elemento p debe encontrarse en el *interior* de un determinado *entorno* del elemento d.

Sin perjuicio, naturalmente, de la importancia que, sin duda alguna, revisten otros casos de con juntos dotados de estructuras topológicas y formados por elementos de naturaleza jurídica, como aquellos en los que intervienen los ámbitos de aplicación de las leyes, por ejemplo, entiendo que la consideración de la prescripción como concepto del que se derivan estructuras topológicas relacionadas con el Derecho es particularmente significativa, ya que lo que en este caso se considera no son sólo unos conjuntos dotados de unas determinadas estructuras topológicas sino un concepto anterior o superior a la propia existencia de tales conjuntos estructurados, concepto que, al ser inherente, por una parte, al pensamiento típicamente jurídico y constituir, por otra, el origen de estructuras topológicas, enlaza con este tipo de estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático la genuina naturaleza del pensamiento jurídico. Entiendo asimismo que es precisamente en el arraigo de las concepciones topológicas en la mente humana, en general, y en la mente de los juristas, en particular, donde hay que buscar, en su fundamental aspecto psicológico, el origen de la prescripción.

2. El cálculo infinitesimal.

La noción intuitiva que se traduce por "tender hacia" de la que habla Lucienne Félix en la primera de sus frases que he citado al principio del presente capítulo se nos presenta, por ejemplo, si en un "espacio métrico" suponemos que dos de sus elementos, x e y, pueden hallarse tan "próximos" entre sí como queramos (en el sentido de que pueda ser tan pequeña como queramos la distancia entre los mismos). Intuitivamente, entonces, percibimos una situación que podemos expresar diciendo que "tiende" -o que "puede tender"- "hacia cero" la distancia citada. De esa noción que se traduce por "tender hacia cero" procede la de "infinitésimo", de la que se deriva, a su vez, la denominación -y el contenido- del llamado "cálculo infinitesimal", poderoso instrumento matemático mediante el que se viene forjando todo nuestro desarrollo científico y tecnológico desde hace algo más de tres siglos. Si consideramos ahora las influencias recíprocas entre el citado desarrollo y las llamadas "ciencias humanas y sociales", como la Psicología, la

Sociología, la Economía y la Ciencia política, por ejemplo, influencias recíprocas derivadas en gran parte, asimismo, de las relaciones de tales ciencias con el cálculo infinitesimal, bien sean dichas relaciones directas o indirectas, a través de otras ramas de la Matemática como la estadística matemática o la teoría de juegos, y tenemos en cuenta, por otra parte, las interconexiones entre el Derecho y las indicadas ciencias humanas y sociales, podemos darnos cuenta del interés que para los juristas de nuestros días reviste también esa importantísima rama de la Matemática a la que denominamos cálculo infinitesimal.

\- - -

C A P I T U L O VIII.- CATEGORIAS. SISTEMAS: LOS SISTEMAS POLITICOS.

1. Los conceptos de categoría y sistema.

En los capítulos anteriores del presente trabajo he analizado, de acuerdo con lo que anuncié en la introducción al mismo, algunos aspectos de las estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático -estructuras de orden, estructuras algebraicas y estructuras topológicas-, insistiendo particularmente en aquellos de tales aspectos que están relacionados o pueden relacionarse con el Derecho. Con el propósito de completar el indicado análisis voy a referirme ahora a los conceptos de categoría y sistema, conceptos íntimamente ligados al de estructura -inseparables, incluso, del mismo desde diversos puntos de vista- y cuyas relaciones con el Derecho trataré asimismo de destacar.

No voy a aludir aquí, como es natural, a todas y cada una de las acepciones de los términos "categoría" y "sistema", sino simplemente al uso de estos mismos términos relacionado con esa teoría de conjuntos y con esas estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático de que he venido tratando a lo largo del presente trabajo.

Así, pues, y refiriéndome ya concretamente a la definición de "categoría", entiendo que se adaptan a los objetivos que aquí persigo las siguientes frases de Hilton, pertenecientes a la obra de dicho autor y Matthys "Le langage des catégories" que he citado ya en el capítulo anterior:

"Para definir una categoría $\mathcal{C}$, tres tipos de datos son necesarios:

1º. Una clase de <u>objetos</u> A, B, C...;

2º. A todo par (A, B) de objetos de $\mathcal{C}$ está asociado un conjunto $\mathcal{C}$(A, B) de <u>morfismos de A en B</u>;

3º. A toda terna (A, B, C) de objetos de $\mathcal{C}$ corresponde una <u>ley de composición</u>:

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \longrightarrow \mathcal{C}(A, C)."$$

"Antes de citar los axiomas que definen una categoría, he aquí una terminología auxiliar y algunas notaciones que nos permitirán ver que eso de que aquí tratamos es en gran medida una generalización de nociones familiares".

"Si f pertenece a $\mathcal{C}(A, B)$, escribiremos:

$$f\colon A \to B, \text{ o bien } A \xrightarrow{f} B.$$

El conjunto $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C)$ está formado por los pares (f, g) donde:

$$A \xrightarrow{f} B \text{ y } B \xrightarrow{g} C.$$

La composición de f y g se escribirá $f \bullet g$ o, simplemente, fg, así:

$$A \xrightarrow{fg} C."$$

....

"Veamos ahora los axiomas. El primero no es en realidad más que una convención pero los dos siguientes son mucho más sustanciales".

"A1 Los conjuntos $\mathcal{C}(A_1,B_1)$ y $\mathcal{C}(A_2,B_2)$ son disjuntos salvo si $A_1=A_2$ y $B_1=B_2$."

"A2 Si $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$, $C \xrightarrow{h} D$, entonces $f(gh)=(fg)h$."

"A3 Para cada objeto A, existe un morfismo $1_A: A \longrightarrow A$ tal que, para todo $f : A \longrightarrow B$ y todo $g: C \longrightarrow A$, se tiene $1_A f=f$ y $g1_A=g$."

"Se ve enseguida que A determina el morfismo 1_A de manera única..." (1).

La influencia de la "invención" de esas "categorías" a que me vengo refiriendo sobre el estudio

---

1) Hilton y Matthys, obra y edición citadas, págs. 13 y 14.

de las estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático ha sido destacada, por otra parte, por Piaget en los siguientes términos:

"...el estructuralismo de los Bourbaki está en vías de transformación bajo la influencia de una corriente que es útil señalar, ya que nos lleva a percibir no sólo el modo de descubrimiento, sino también el de formación, de las estructuras nuevas. Se trata de la invención de las "categorías" (Mac Lane, Eilenberg, etc.), es decir, de una clase de elementos en la que se incluyen las funciones inherentes a los mismos, acompañada así, pues, de morfismos. En efecto, en su acepción actual, una función es la "aplicación" de un conjunto sobre otro o sobre sí mismo y conduce así a la construcción de isomorfismos o de "morfismos" bajo todas sus formas. Basta decir que, persistiendo sobre las funciones, las categorías giran no ya alrededor de las estructuras madres, sino de los procedimientos mismos de definición de las relaciones que permitieron delimitarlas, de lo que resulta la consideración de la nueva estructura como extraída no de los "entes" obtenidos como resultado de las ope raciones precedentes, sino de esas mismas operaciones consideradas en su condición de procesos formadores".

"No es, pues, sin razón que S. Papert ve en las categorías un esfuerzo para captar las operaciones del matemático más que de "la" matemática. He ahí un nuevo ejemplo de esa abstracción reflexiva que extrae su sustancia no de los objetos sino de las acciones ejercidas sobre ellos (incluso cuando los objetos anteriores eran ya el producto de una abstracción semejante), y estos procesos de actuación son preciosos en cuanto a la naturaleza y al modo de construcción de las estructuras" (1).

Sobre la consideración de la noción de categoría como una abstracción de nivel superior en relación con los conceptos de conjunto y estructura dice asimismo Hilton lo siguiente:

"Cuando se enuncia "sea G un grupo..." todo el mundo comprende inmediatamente que se trata de

---

1) Piaget, Le structuralisme, ed. cit., págs. 24 y 25.

un "grupo abstracto"... El adjetivo "abstracto" atestigua la evolución histórica: la noción de grupo fue introducida primitivamente a través de los grupos de desplazamientos, de transformaciones o de permutaciones. No fué sino en un estadio relativamente avanzado cuando se propuso una definición axiomática y cuando las propiedades de los grupos empezaron a ser estudiadas independientemente de su papel geométrico o combinatorio. Del mismo modo, fue después de una exploración prolongada de las propiedades de las partes de un espacio euclídeo cuando se llevó adelante una definición axiomática de los espacios topológicos".

"Si, según un punto de vista perfectamente arbitrario, consideramos como abstracciones de un primer nivel conceptos como los de conjunto, de grupo, de espacio topológico..., la noción de categoría es entonces una abstracción de un segundo nivel puesto que aparece concretada precisamente en teoría de conjuntos, en teoría de grupos, en topología, etc..."(1).

---

1) Hilton y Matthys, obra y edición citadas, págs. 11 y 12.

Finalmente, en relación con la "riqueza" que a la teoría de conjuntos "aporta" la de categorías, en un artículo cuyo significativo título es la pregunta "Dans dix ans la théorie des catégories remplacera-t-elle celle des ensembles?" (1) -pregunta a la cual, como afirma la autora de dicho artículo, "empieza a ser corriente darle una respuesta positiva" (2)-, dice Jacqueline Fourastié:

"¡Resumamos! La teoría de categorías aporta una gran riqueza a la teoría de conjuntos puesto que permite unir transformaciones a los "objetos" (antes decíamos "elementos"). Se da entonces una generalización cuyo interés es evidente..." (3).

---

1) Jacqueline Fourastié, Dans dix ans la théorie des catégories remplacera-t-elle celle des ensembles?, en "Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public", nº 297 (febrero 1975), págs. 65 a 73.

2) Jacqueline Fourastié, op. cit., pág. 65.

3) Jacqueline Fourastié, op. cit., pág. 68.

Como ejemplos de categorías cita la mencionada autora, entre otros, y en los términos que transcribo a continuación, los siguientes:

"-el más clásico es la categoría de los conjuntos. Los objetos son los conjuntos. Para dos conjuntos E y F, el conjunto Hom (E,F) es el conjunto de las aplicaciones de E en F. Si se tiene:

$$E \xrightarrow{\alpha} F \qquad F \xrightarrow{\beta} G$$

se puede obtener la composición de α y β. La identidad e_A es la aplicación idéntica de A en sí mismo".

....

"-otro ejemplo, los grupos. Los objetos son los grupos, Hom (A,B) es el conjunto de los homomorfismos... del grupo A en el grupo B."

....

"-se ha generalizado mucho: ...¡Se ha llegado incluso a decir que una Economía es una categoría cuyos objetos son los productores y los consumidores, y los morfismos los cambios!" (1).

Si tenemos en cuenta ahora la intervención del correspondiente ordenamiento jurídico en esos "cambios" a que alude Jacqueline Fourastié (así como en la delimitación de la personalidad de productores y consumidores y, en general, en las relaciones entre ellos), intervención que se da asimismo en otros casos de relaciones interhumanas de naturaleza similar desde un punto de vista jurídico y que también podrían citarse como ejemplos de categorías, y las intercone

---

1) Jacqueline Fourastié, op. cit., págs. 66 y 67. La notación que utiliza Jacqueline Fourastié difiere ligeramente de la que, según hemos visto, utiliza Hilton. Se puede observar con facilidad, no obstante, que e_A y Hom (A,B) que figuran en la primeramente mencionada de dichas notaciones, equivalen, respectivamente, a 1_A y $\mathcal{C}(A,B)$ de la que utiliza Hilton.

xiones (ya señaladas a lo largo del presente trabajo) del Derecho con los otros dos ejemplos de categorías citados (conjuntos y grupos), podemos percatarnos del interés que para los juristas reviste también la consideración de ese novísimo aspecto de la Matemática a que ha dado lugar el descubrimiento de las categorías y prever que, en conexión con esa "matematización de las normas" a que alude Klug según hemos visto en el capítulo anterior de este trabajo, el "lenguaje de las categorías" no será ajeno al lenguaje jurídico del futuro.

Un interés más actual y más directo, no obstante, tiene, para quienes, desde diversos puntos de vista, estamos interesados en la problemática jurídica en nuestros días, el otro de los conceptos básicos que trato de definir en este capítulo, de acuerdo con lo que he indicado en los primeros párrafos del mismo: el concepto de "sistema". "Un sistema", dice Attali, "es un conjunto de objetos unidos por alguna forma permanente de interdependencia para la realización de un conjunto de objetivos" (1). Luego, tras

---

1) Attali, Los modelos políticos. Traducción de Enri

indicar que, como dice Ackoff, un sistema es, incluso, "un complejo de entidades en relaciones", prosigue Attali refiriéndose al concepto de sistema en los siguientes términos:

"...Se trata, pues, de un conjunto de relaciones relativamente estables, bastante constantes para formar una estructura. De cada una de estas entidades se dice que está en relación jerárquica con el todo, sin que esto suponga necesariamente una noción de poder, sino más bien una noción de condicionalidad... Un sistema, pues, es la descripción de una realidad percibida y discernida por sus componentes y de las relaciones entre sus componentes..."

"Es evidente que una situación cualquiera, política por ejemplo, puede ser dividida en subconjuntos en formas diversas, según el objetivo del análisis. En términos muy generales, se dividirá un sis

---

que Muñoz Latorre, Barcelona, 1974, pág. 127.

tema en subsistemas responsables de la realización de una misión concurrente a la realización de los objetivos del propio sistema".

"Todo sistema se define por el dato de las cinco características siguientes:

- Los objetivos del sistema, y con mayor precisión, las medidas de los rendimientos del sistema. Estos pueden ser múltiples (...los objetivos de un partido político, por ejemplo, considerado como un sistema, no son reducibles a un objetivo único).

- El ambiente del sistema, es decir, las sujeciones que le contienen (el cuerpo electoral, las condiciones económicas).

- Los recursos del sistema, es decir, los medios (hombres, ideología, información) de los que puede disponer para realizar los objetivos.

- Las entidades componentes del sistema, o subsistemas, sus misiones y la medida de sus actuaciones (secciones o procedimientos del partido o cualquier otra división que pueda parecer operacional).

-La gestión del sistema, es decir, el establecimiento y la puesta en práctica de planes para el sistema, en función de los objetivos, del ambiente, de los recursos y de los componentes. La gestión establece las misiones de los componentes, reparte los recursos, controla los resultados del sistema. Se encuentran estos conceptos diferentes en el análisis de cualquier sistema, ya se trate de un sistema de origen intelectual (la programación) o administrativo (el PPBS) o de un sistema político" (1).

"La teoría de los sistemas" -dice asimismo Attali- "es, ante todo, un primer enfoque de una eventual formalización de grandes sectores de las ciencias sociales" (2). Teniendo esto en cuenta desarrolla el mencionado autor un análisis -de cuya iniciación me propongo ofrecer aquí una idea- a través del cual, como él mismo dice, trata de situar "el estudio de los modelos matemáticos en el marco más general de

---

1) Attali, obra y traducción citadas, págs. 127 y 128.

2) Attali, obra y traducción citadas, pág. 127.

la teoría de los sistemas" (1), advirtiendo, por otra parte, con relación a este mismo análisis, lo siguiente:

"La filosofía profunda de este análisis se reduce, pues, a considerar que las correspondencias establecidas así entre las diversas disciplinas revelan isomorfismos e identidades estructurales fundamentales; que de este modo el estudio de los sistemas más simples, a saber, de las máquinas, permitirá descubrir propiedades de estructuras más complejas, como, por ejemplo, las organizaciones sociales..."(2).

Refiriéndose luego a ejemplos determinados de sistemas, y teniendo en cuenta la clasificación de éstos en "sistemas concretos" y "sistemas abstractos", dice Attali lo siguiente:

"Entre los sistemas concretos, citemos un ordenador, una red telefónica, una empresa, una escue

---

1) Attali, obra y traducción citadas, pág. 127.

2) Attali, obra y traducción citadas, págs. 128 y 129.

la, un hospital, un sistema de defensa aérea. El sistema nervioso de un mamífero es también un conjunto de entidades en relaciones..."

"Por otra parte, el hombre construye, para comprender el mundo, unos sistemas abstractos. Divide así un problema, "a priori" inabordable, en un conjunto de subproblemas, a fin de percibir mejor su solución. La química es un sistema compuesto de diferentes ramas. Lo propio ocurre con las matemáticas o la teoría económica..."

"Un algoritmo de ordenador es un perfecto ejemplo de sistema abstracto. Toda organización humana es un sistema. Los poderes públicos, la planificación de empresa son excelentes ejemplos de sistema... A este respecto, es preciso distinguir el sistema concreto de la empresa de los sistemas abstractos que se insertan en ella, como el sistema de información, o el sistema de planificación" (1).

---

1) Attali, obra y traducción citadas, pág. 129.

2. Sistemas sociales y sistemas políticos.

De acuerdo con la definición que nos ofrece Caplow (definición a la que me he referido ya en el capítulo III de este mismo trabajo al ocuparme de las tríadas) "un sistema social es aquel cuyos elementos son personas o grupos de personas y cuyas relaciones se establecen a través de interacción social".

Particularmente interesantes, por otra parte, en el campo específico del Derecho, y en el contexto global de los "sistemas sociales", son los "sistemas políticos". Refiriéndose a tales "sistemas políticos", en su libro ya citado y bajo el epígrafe "Análisis de sistema en ciencia política", dice Attali:

"El análisis de sistema... se ha expandido grandemente en numerosos aspectos de la ciencia política".

"En tres obras esenciales ("The Political System", 1953, "A Framework for Political Analysis", 1965, y "A Systems Analysis of Political Life", 1965), David Easton introduce en ciencia política el concepto de sistema".

"Para Easton, un sistema político es un conjunto de interacciones políticas comprobadas en un ambiente político dado. Easton describe el sistema político como un sistema que tiene como recursos:

- unas exigencias, cuya articulación, reducción y formulación son realizadas por unos partidos políticos o unos grupos de presión;

- unos apoyos con respecto al sistema político".

"Estas entradas y salidas son contabilizadas, pero no son mensurables. El sistema político permite a unos órganos de decisión, mediante la existencia de un procedimiento constitucional, elegir entre estas exigencias y precisar los programas que deben ponerse en servicio para convertir estas exigencias en apoyos".

"Unos medios administrativos realizan estos programas ("output"). Puede producirse una regulación por retroacción: influído por las exigencias y los apoyos, el sistema político puede, a su vez, tomar unos programas para disminuir las exigencias y aumentar los apoyos mediante unos programas. Se trata, así pues, más de una correlación lineal que de una verdadera retroacción, ya que las influencias de los "outputs" sobre los "inputs" se ejercen en períodos distintos".

"Finalmente, Easton vuelve a esgrimir la distinción... entre una comunidad política, el procedimiento constitucional y el ejecutivo" (1).

Tanto al "esgrimir la distinción entre una comunidad política, el procedimiento constitucional y el ejecutivo" como al considerar, simplemente, un "sistema político" como "un conjunto de interacciones políticas comprobadas en un ambiente político dado"

---

1) Attali, obra y traducción citadas, pág. 148.

o los "recursos" de tal "sistema político" que enume ra Attali, de acuerdo con las ideas de Easton, podemos darnos cuenta de la problemática de naturaleza específicamente jurídica que se deriva del análisis de los sistemas políticos, problemática que afecta no sólo al Derecho político, ni tampoco sólo a éste y al administrativo, al que se refiere Attali explícitamente en ese análisis suyo que estamos consideran do (1), sino que afecta, además -y muy especialmente-, al Derecho civil, así como al penal, al procesal,etc.

Sin que ello implique, desde luego, que va yamos a prescindir del esquema que nos ofrece Easton, debemos tener en cuenta ahora que lo que aquí nos in teresa, en la consideración del concepto de "sistema político" desde un punto de vista lógico-matemático, es definir el proceso de formalización a utilizar con vistas a la consideración citada. Para que el estudio de los sistemas políticos desde un punto de vista ló

---

1) La citada referencia explícita al Derecho adminis trativo puede verse en Attali, obra y traducción citadas, pág. 138.

gico-matemático resulte eficaz aquí y ahora, por otra parte, el modelo teórico de sistema político que adoptemos con vistas al mencionado estudio debe adaptarse al esquema básico de los sistemas políticos que se nos presentan corrientemente en la realidad en el mundo actual: en relación con el citado aspecto del estudio de los sistemas políticos es muy fácil observar, no obstante, en el modelo de "sistema político" que nos ofrece Easton, la ausencia de un elemento al que se suele atribuir fundamental importancia en el estudio teórico-práctico de los reales y concretos sistemas políticos de nuestros días: me refiero a la noción de ideología. Tanto esa noción de ideología como el carácter de modelo formalizable aparecen claramente, sin embargo, en el llamado "modelo integrado", que ha sido estudiado fundamentalmente por Downs y del que nos da noticia asimismo Attali en los siguientes términos:

"El modelo integrado es una investigación muy reciente para integrar la noción de ideología en los modelos políticos de naturaleza matemática... Yendo más lejos, es preciso acudir a un enfoque similar al de Easton pero formalizable".

"En primer lugar, digamos unas palabras sobre la ideología que interviene en el modelo de Downs".

"La ideología sólo interviene cuando la información de que disponen los electores deja de ser perfecta. Entonces, para Downs, los partidos políticos tratan de ayudar a los electores proponiéndoles "imágenes verbales de la buena sociedad", que denominan "ideología", evitando así a los electores, de cuya confianza gozan, que traten de juzgar detallada y personalmente los programas".

"Vemos, pues, lo que Downs denomina ideología. Para él, el debate político no se desarrolla entre múltiples concepciones de la sociedad, sino entre múltiples máquinas de poder que utilizan la ideología como un medio de persuasión política entre otros..."

"Al ser la ideología un instrumento de toma del poder, el partido político no puede ya definir su programa en función del estado de la opinión, sino que debe hacer todo para persuadir a los electores del valor de su programa. El partido utilizará para ello los servicios de múltiples grupos de influencia (líderes, agitadores, corruptores). Deberá también acudir a los informadores, ya que no conoce el estado de la opinión. Estos tratarán de "reconstruir" las informaciones por diversos medios que permitan determinar seguidamente su posición de equilibrio y "venderla" a los electores. La ideología aparece, consecuentemente, "a posteriori", como un medio político que sólo la incertidumbre de los electores permite utilizar. Tampoco, en este sentido, la noción de programa tiene más que un valor táctico".

"Un modelo como este no permite comprender la naturaleza del comportamiento de un ejecutivo en busca de una victoria política y esforzándose en realizar un programa pese a todo. Por otra parte, es extremadamente difícil desarrollar semejantes modelos formales en el marco de una teoría matemática. Ello, sin embargo, es deseable desde dos puntos de vista diversos.

-en la medida en que existen unos modelos de comportamiento económico formal, importa integrarlos como subsistemas de modelos políticos generales;

-el análisis de sistema encuentra su máximo poder cuando acude a los modelos matemáticos de la teoría del control".

"Eso ocurre con el modelo integrado, modelo todavía en gestación, que se esfuerza por responder a estas preguntas. En este modelo, el sistema político se considera como encargado no sólo de producir unos bienes colectivos, sino también de organizar la producción económica en su conjunto. El esquema de funcionamiento de la colectividad es el siguiente:

El sistema político debe hacer aparecer en la sociedad, en cada período, dos tipos de bienes:

-un <u>consenso</u> colectivo en torno al ejecutivo (objetivo electoral);

-la <u>realización</u> de cierto programa (objetivo ideológico)."

"Uno y otro de estos productos dependen de la producción de dos especies de bienes intermediarios, económicos y mitológicos. Los bienes económicos son los bienes clásicos, que es posible representar mediante el producto nacional. Los bienes mitológicos son las otras producciones de una sociedad humana, como la propaganda, el aseguramiento, la incitación a la integración social. Su naturaleza es extremadamente compleja, pues son a la vez consumo (lo que es evidente) e inversiones (en la medida en que aumentan el "consenso" colectivo, y por tanto, la productividad). Su papel es esencial en el equilibrio y la evolución de la sociedad política."

"Para producir estos bienes intermediarios, la colectividad dispone de tres tipos de recursos: el capital, el trabajo y el capital de confianza. El último se caracteriza por la acumulación de los "consensos" sucesivos manifestados en cada período, como el capital está caracterizado por la acumulación de inversiones sucesivas."

....

"La estrategia del ejecutivo consistirá entonces en maximizar una función del programa y del "consenso", funciones a su vez de producciones intermedias. Entonces, ¿cuál es la estrategia óptima del ejecutivo a lo largo de su mandato? La formulación matemática del problema puede reducirse a un problema de teoría del control, que se debe a una maximización de Pontryagin... Entonces la formulación es extremadamente compleja y es difícil sacar numerosas conclusiones. Con todo, pueden demostrarse los resultados siguientes:

-la preferencia por el futuro es independiente de la producción mitológica;

-la preferencia por la satisfacción de las necesidades en bienes reales decrece cuando la eficiencia de la producción mitológica aumenta;

-el régimen de coalición mínima es estable. Si se realiza, la confianza tiende hacia un límite finito y la producción de bienes reales aumenta al infinito".

"Estos resultados son todavía extremadamente someros. Contienen, sin embargo, en germen, numerosos progresos de la ciencia política que el análisis del sistema podrá desarrollar" (1).

Conviene aclarar aquí, finalmente, que el concepto de "coalición mínima" al que se refiere Attali corresponde al de "coalición dominante más económica" que introduce Caplow en su libro "Dos contra uno: Teoría de coaliciones en las tríadas" que he citado ya al hablar de tríadas y de coaliciones en el capítulo III del presente trabajo. Según Caplow, como he dicho en el mencionado capítulo, "una coalición es una combinación de dos o más sujetos que adoptan una estrategia común frente a otros sujetos pertenecientes al mismo sistema" y "una coalición dominante

---

1) Attali, obra y traducción citadas, págs. 149 y sigs.

es una coalición que domina a su oponente", siendo, además, según el mismo autor, la coalición dominante más económica "aquella que domina a su oponente por un margen menor que cualquier otra coalición dominante" (1).

\- - -

1) Caplow, obra y traducción citadas, pág. 205. Aunque al definir Caplow la "coalición dominante más económica" se refiere solamente a "la coalición dominante más económica de una tríada", la mencionada definición de "coalición dominante más económica" es válida tanto para el caso de una tríada como para el de cualquier otro sistema social.

C A P I T U L O IX.- LOS SISTEMAS DE ELECCION DE BIENESTAR SOCIAL.

1. P r e l i m i n a r e s.

En el contexto de los sistemas sociales a que me he referido en el capítulo anterior revisten particular importancia los llamados "sistemas de elección de bienestar social" cuyo estudio, desde un punto de vista lógico-matemático, ha venido desarrollándose eficazmente en los últimos veinticinco años. Tanto para introducir ese concepto de "sistema de elección de bienestar social" como para ofrecer una idea de la iniciación al análisis del mismo mediante la consideración de las estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático a que me vengo refiriendo en este trabajo voy a basarme en unas ideas originales del famoso sociólogo y economista norteamericano Kenneth J. Arrow (1). La formulación matemática que

1) Las indicadas ideas fueron expuestas por Arrow en

utilizaré se debe, en gran parte, a Lía Oubiña (1). En cuanto a mi aportación, se reducirá a unas ligeras modificaciones y aclaraciones relativas a la indicada formulación matemática y a destacar algunos ejemplos de aplicación concreta de las mencionadas ideas de Arrow al estudio de problemas de naturaleza jurídica.

El problema genérico que analiza Arrow en su mencionado libro es el siguiente:

Se tiene un conjunto, S, llamado de "alternativas", cuyos elementos pueden ser ordenados por un determinado número, n, de individuos, de acuerdo

---

su libro Social Choice and Individual Values, New York, 1951.

1) Las interesantes aportaciones de Lía Oubiña al estudio riguroso de los sistemas de elección de bienestar social a las que voy a recurrir para el desarrollo del presente capítulo pueden verse en la obra de dicha autora Introducción a la teoría de conjuntos, Buenos Aires, 1965, págs. 152 y sigs.

con sus preferencias. El conjunto S puede estar constituído, por ejemplo, por candidatos en una elección, o bien por diversas medidas que sea posible adoptar en unas circunstancias determinadas; para el Derecho -político y administrativo, particularmente- reviste especial interés este último caso cuando a lo que se aspira es a instaurar o modificar un régimen político en un país (o colectividad humana, en sentido genérico) mediante un sistema de elección, bien sea ésta directa por parte de los componentes de la comunidad de que se trate -referéndum-, o indirecta -decisión, a través de los componentes, democráticamente elegidos, de una cámara legislativa, por ejemplo-. Pueden formar el conjunto S, asimismo, posibles decisiones que, ante unos hechos concretos, autorice la legislación de un país a adoptar, mediante votación, a sus propios órganos colegiados (Consejo de Ministros, Corporaciones municipales, etc.) en el cumplimiento de las funciones asignadas a los mismos. Un caso específicamente jurídico se da cuando, en la intervención de Jurados en la administración de justicia, el conjunto S de alternativas se presenta constituído ya "a priori" por dos únicos elementos ("cul pable" y "no culpable"). Más adelante se verá la importancia que, para las presentes consideraciones, tiene el hecho de que el conjunto S esté formado precisamente por dos únicos elementos.

Expuesto ya el concepto de "conjunto de alternativas", cuyos elementos pueden ser ordenados por un determinado número de individuos, se trata de encontrar un orden para esas mismas alternativas, llamado "orden social", que se adapte en la mejor forma posible a los órdenes individuales. Esta formulación puramente intuitiva del problema será aclarada posteriormente; se precisará también el significado de la expresión "adaptarse en la mejor forma posible a los órdenes individuales".

En primer lugar deben estudiarse las propiedades de la "relación de preferencia" entre elementos de un cierto conjunto. Ante todo resulta que la actitud de una persona ante dos de tales elementos, $\underline{x}$ e $\underline{y}$, no es siempre de preferencia (es decir, no siempre prefiere $\underline{x}$ a $\underline{y}$ o prefiere $\underline{y}$ a $\underline{x}$), sino que, en algunos casos, es de indiferencia (le es indiferente $\underline{x}$ o $\underline{y}$). Es necesario referirnos entonces a las propiedades de ambas relaciones -de indiferencia y de preferencia-.

Si se designa con _xIy_ la relación "_x_ es indiferente a _y_" para una persona determinada, resulta, intuitivamente, que I es una relación reflexiva, simétrica y transitiva, o sea que I es una relación de equivalencia en el conjunto S de alternativas.

Si se designa con _xPy_ la relación "_x_ es preferible a _y_" para una persona determinada, resulta, también intuitivamente, que P es una relación transitiva.

Todavía I y P no están totalmente caracterizadas; es decir, existen muchos pares de relaciones en un conjunto S de alternativas, una de ellas de equivalencia y la otra transitiva, que carecen de algunas de las propiedades que intuitivamente asignamos a las relaciones de indiferencia y preferencia. Es necesario, pues, determinar las relaciones específicas existentes entre I y P para poder formular luego una definición axiomática de las indicadas relaciones de indiferencia y preferencia.

En primer lugar, frente a dos alternativas $\underline{x}$ e $\underline{y}$ un individuo adopta una de las dos actitudes (de indiferencia o de preferencia), y sólo una de ellas: es decir, para todo par, $\underline{x},\underline{y}$, de elementos de S vale una y sólo una de las siguientes relaciones: $\underline{x}I\underline{y}$, $\underline{x}P\underline{y}$, $\underline{y}P\underline{x}$.

Por otra parte, si $\underline{x}$ es indiferente a $\underline{y}$ e $\underline{y}$ es preferible a $\underline{z}$, es lógico suponer que $\underline{x}$ es preferible a $\underline{z}$ y, simétricamente, si $\underline{x}$ es preferible a $\underline{y}$ e $\underline{y}$ es indiferente a $\underline{z}$, es razonable suponer que $\underline{x}$ es preferible a $\underline{z}$. En forma simbólica, se tiene:

$$\underline{x}I\underline{y} \text{ e } \underline{y}P\underline{z} \Longrightarrow \underline{x}P\underline{z}$$
$$\underline{x}P\underline{y} \text{ e } \underline{y}I\underline{z} \Longrightarrow \underline{x}P\underline{z}.$$

Ahora ya se está en condiciones de definir <u>axiomáticamente</u> las relaciones de indiferencia y preferencia.

1-1. <u>Definición</u>. Sean I y P relaciones en un conjunto S llamado de "alternativas". Las relaciones I y P se llaman relaciones de "indiferencia" y "preferencia", respectivamente, si cumplen los siguientes axiomas:

A.1.- Para todo par x, y, de elementos de S, vale una y sólo una de las siguientes relaciones:

$$xIy, \quad xPy, \quad yPx.$$

A.2.- La relación I es de equivalencia.

A.3.- La relación P es transitiva.

A.4.- Para toda terna x, y, z, de elementos de S, se cumple

$$xIy \text{ e } yPz \text{ implican } xPz,$$
$$xPy \text{ e } yIz \text{ implican } xPz.$$

Resulta a menudo más conveniente trabajar con una sola relación R que englobe a las relaciones I y P en lugar de hacerlo con éstas por separado. Esta relación se llama de "indiferencia o preferencia" o de "preferencia o indiferencia", indistintamente, y tiene la siguiente definición:

1-2. Definición. Sean I y P relaciones de indiferencia y preferencia, respectivamente, en un conjunto S de alternativas. Una relación R en S se llama de "indiferencia o preferencia" (o de "preferencia o indiferencia") con respecto a I y a P si: xRy si y sólo si xIy o xPy.

Se dice que la relación R ha sido construida a partir de P e I y que P e I son las relaciones de preferencia e indiferencia, respectivamente, correspondientes a R.

1-3. Puede demostrarse con facilidad el siguiente teorema: La relación R definida en 1-2 tiene las siguientes propiedades:

a) R es reflexiva.
b) R es transitiva.
c) xRy e yRx implican xIy.
d) Para todo par x, y de objetos de S se cumple: xRy o yRx.
e) $x \not R y$ si y sólo si yPx.

Observación: La relación R es un preorden.

2. Sistemas de elección social.

Sea S un conjunto de alternativas y sean n individuos que introducen n relaciones de indiferencia y n de preferencia en S, es decir, para cada par de objetos x, y, de S, cada individuo decidirá si prefiere x a y, y a x o le es indiferente x o y, con lo cual cada individuo i introduce una relación de indiferencia I_i y una de preferencia P_i. Para cada i, a la relación de indiferencia o preferencia R_i correspondiente a I_i y a P_i se la llama "preorden individual sobre S".

Se tiene entonces para cada conjunto de n individuos, una familia $\{R_1,\ldots,R_n\}$ de preórdenes individuales sobre S, pero como los individuos, se supone, constituyen una comunidad, es necesario encontrar una única relación de preferencia o indiferencia en S, que será la relación de la comunidad o de la sociedad. Se supondrá que dicha comunidad está compuesta por un número n fijo de individuos, y que cada individuo establece su relación de indiferencia o preferencia sobre S. Es de esperar que la relación de la sociedad dependa de la totalidad de los n preórdenes individuales.

Lo que se busca es, entonces, un método o sistema que permita asignar a cada familia $\{R_1,\ldots,R_n\}$ de relaciones de indiferencia o preferencia sobre un mismo conjunto S una relación de preferencia o indiferencia en ese conjunto. Tal sistema, además, tendrá que poder ser aplicado a diferentes conjuntos de alternativas, los cuales formarán, entonces, un conjunto de conjuntos, $\sum$, y a diferentes comunidades.

Por otra parte, supóngase que, para dos alternativas x e y de un conjunto S, un individuo determinado prefiere x a y. Si luego se agregan o suprimen alternativas, con excepción de x e y, se obtiene un nuevo conjunto S'; es de esperar que también en este caso prefiera x a y, es decir, su elección entre x e y depende sólo de este par de alternativas con exclusión de las otras alternativas de los conjuntos S y S'. Una condición semejante debe imponerse a un buen sistema de elección.

2-1. Definición. Sea Σ un conjunto de conjuntos de alternativas. Se llama "sistema de elección social" sobre Σ a un conjunto de funciones f_S, una para cada $S \in \Sigma$, tales que, para todo $S \in \Sigma$ y todo n natural mayor que 1, f_S asigna a cada familia de n preórdenes individuales sobre S una relación de indiferencia o preferencia sobre el mismo S, sujetas, además, a la siguiente condición: sean dos conjuntos de alternativas, S y S', pertenecientes ambos a Σ, con $S \cap S' \neq \emptyset$ y $\{R_1,\dots,R_n\}$, $\{R'_1,\dots,R'_n\}$ familias de preórdenes individuales sobre S y S' respectivamente, tales que, para i=1,..., n, R_i y R'_i, coincidan sobre $S \cap S'$. Entonces $f_S(\{R_1,\dots,R_n\})$ coincide con $f_{S'}(\{R'_1,\dots,R'_n\})$ sobre $S \cap S'$. A las funciones f_S se las llama "funciones sociales sobre S".

Notación. En lo sucesivo, si no se hace mención expresa de lo contrario, se indicarán con P_i e I_i las relaciones de preferencia e indiferencia, respectivamente, correspondientes a una relación R_i.

Un ejemplo de un método de elección que no es un sistema de elección social, en el sentido de la anterior definición, es el siguiente. Supóngase dada una lista de candidatos para un cargo determinado y _n_ electores. Cada elector debe ordenar (o preordenar) esta lista de acuerdo con sus preferencias, es decir, debe designar primero a su candidato preferido, luego al segundo y así siguiendo. Se asignan pesos a los candidatos en cada lista en magnitud decreciente respecto del orden de preferencias, se suman los pesos obtenidos por cada candidato y resulta electo el que obtiene mayor suma. Sean tres electores y cuatro candidatos: _x_, _y_, _z_, _w_, a los cuales se les asignan los pesos 1,2,3, y 4 comenzando con el de inferior posición en cada lista. Los dos primeros electores ordenan a los candidatos en la forma _x y z w_, mientras que el tercero lo hace en la forma _z w x y_. En estas condiciones los puntos obtenidos por _x_, _y_, _z_ y _w_ son, respectivamente, 10, 7, 8 y 5. Resulta, por lo tanto, vencedor el candidato _x_. Si el candidato _y_ se retira, los electores mantienen sus listas suprimiendo el nombre de este candidato. Resulta entonces que la ordenación de los dos primeros electores es _x z w_ y la del tercero _z w x_, con lo cual los puntos para _x_, _z_ y _w_ son, respectivamente, 7, 7 y 4. Por lo tanto, con respecto al conjunto $S = \{x, y, z, w\}$, resultó $\underline{x}$ preferible a $\underline{z}$, mientras que con respecto a $S' = \{x, z, w\}$ resultó $\underline{x}$ indiferente a $\underline{z}$, luego, si R y R' son las relaciones de indiferencia o preferencia, definidas con este método, sobre S y S', respectivamente, se tiene $\underline{z} \not R \underline{x}$ y $\underline{z} R' \underline{x}$, de donde R y R' no coinciden sobre $S \cap S'$.

3. Sistemas de elección de bienestar social.

Se definirán ahora algunas propiedades que pueden ser asignadas a funciones sociales pertenecientes a un sistema de elección social. La primera de ellas se refiere, intuitivamente, a la relación entre las preferencias individuales y las sociales: en qué forma un cambio favorable a una alternativa determinada, en las relaciones de preferencia o indiferencia individuales, incide en los valores de la función social.

3-1. Definición. Sean R y R' dos relaciones de indiferencia o preferencia en un conjunto S de alternati vas, construídas a partir de P e I y de P' e I', respectivamente. Sean x e y dos elementos de S. Se dice que "R' sigue a R en preferencia de x respecto de y" si

a) xPy implica xP'y

b) xIy implica xR'y

Se puede comprobar fácilmente que la anterior relación es un preorden en el conjunto de las relaciones de preferencia e indiferencia sobre S.

3-2. Definición. Se dice que una función social f_S "asocia positivamente valores individuales y sociales" cuando, para dos alternativas cualesquiera x e y de S y dos familias cualesquiera $\{R_1,\ldots,R_n\}$, $\{R'_1,\ldots,R'_n\}$ de relaciones de indiferencia o preferencia sobre S, tales que, para $i=1,\ldots,n$, R'_i sigue a R_i en preferencia de x respecto de y, se tiene que $f_S(\{R'_1,\ldots,R'_n\})$ sigue a $f_S(\{R_1,\ldots R_n\})$ en preferencia de x respecto de y.

En algunos casos, por ejemplo, en países ocupados o colonias, existen sistemas de elección so cial prefijados de antemano de modo que los valores de las funciones sociales establecen siempre la misma relación entre ciertos pares de alternativas, cualesquiera sean las relaciones de preferencia o indiferencia individuales.

3-3. Definición. Una función social f_S se dice "impuesta", si existe algún par de alternativas distintas $\underline{x}$ e $\underline{y}$ de S y algún $\underline{n} > 0$, tales que, para toda familia $\{R_1, \ldots, R_n\}$ de relaciones de indiferencia o preferencia sobre S, se tiene $\underline{xRy}$, donde $R = f_S(\{R_1, \ldots, R_n\})$.

Cuando un país está gobernado por un dictador, éste impondrá sus preferencias y, probablemente, dejará la elección en manos de algunos, o todos los miembros de la comunidad, en caso de serle indiferente dos alternativas cualesquiera.

3-4. Definición. Una función social f_S se llama "dictatorial" si existe un número $\underline{n} > 1$ y un índice $\underline{k}$, $1 \leq k \leq n$, tal que, para toda familia $\{R_1, \ldots, R_n\}$

de relaciones de indiferencia o preferencia sobre S y para todo par $\underline{x}$, $\underline{y}$ de alternativas de S, $\underline{x}P_k\,\underline{y}$ implica $\underline{x}P\underline{y}$, donde P es la relación de preferencia correspondiente a $f_S(\{R_1,\ldots,R_n\})$.

De acuerdo con lo que comúnmente se exige a un sistema de elección social para que satisfaga en el mayor grado posible las aspiraciones de la comunidad, es razonable formular la siguiente definición:

3-5. Definición. Una función social se llama "función de bienestar social" si asocia positivamente valores individuales y sociales y no es impuesta ni dictatorial en $\underline{n}$, para ningún $\underline{n}$. Un sistema de elección social en el que todas las funciones sociales son funciones de bienestar social, se llama "sistema de elección de bienestar social".

Nota. De acuerdo con la definición 3-3, la condición de no imposición para una función social f_S puede reformularse en la forma siguiente, la cual será de utilidad en demostraciones posteriores:

Una función social f_S no es impuesta si y sólo si, para cada par $\underline{x}$, $\underline{y}$ de elementos distintos de S, y para todo $\underline{n}$, existe una familia $\{R_1,\ldots,R_n\}$ de relaciones de preferencia o indiferencia sobre S tal que, para $R = f_S(\{R_1,\ldots,R_n\})$, se tiene $\underline{x}\not R\underline{y}$ (o equivalentemente $\underline{y}P\underline{x}$, donde P es la relación de preferencia correspondiente a R).

4. Existencia de sistemas de elección de bienestar social.

Hasta ahora se han determinado las condiciones que debe reunir un sistema de elección social para ser un sistema de elección de bienestar social, pero no se ha tratado el problema de su existencia. Puede demostrarse fácilmente que cuando los conjuntos de alternativas pertenecientes al conjunto Σ de la definición 2-1 tienen exactamente dos elementos cada uno el método de decisión por mayoría es un sistema de elección de bienestar social sobre Σ. Se definirá con precisión en qué consiste tal método.

4-1. Definición. Sea S un conjunto de alternativas, $\underline{x}$ e $\underline{y}$ dos elementos de S, $\{R_1,\ldots,R_n\}$ una familia de relaciones de preferencia o indiferencia sobre S y sean $V_{\underline{x},\underline{y}}$ y $V_{\underline{y},\underline{x}}$ los siguientes subconjuntos del intervalo natural $[1,n]$ (o sea, del conjunto formado por todos los números naturales comprendidos entre 1 y n, ambos inclusive):

$$V_{x,y} = \{i: \ xP_iy\}$$

$$V_{y,x} = \{i: \ yP_ix\}$$

donde, para $\underline{i} = 1,\ldots,n$, P_i es la relación de preferencia correspondiente a R_i. Poniendo $\underline{xPy}$ si y sólo si el número de elementos de $V_{\underline{x},\underline{y}}$ es mayor que el número de elementos de $V_{\underline{y},\underline{x}}$, y $\underline{xIy}$ si y sólo si $V_{\underline{x},\underline{y}}$ y $V_{\underline{y},\underline{x}}$ tienen igual número de elementos, quedan definidas, para cada familia $\{R_1,\ldots,R_n\}$, dos relaciones sobre S que se dicen obtenidas por "decisión mayoritaria".

Observación. Nótese que a las relaciones P e I obtenidas por decisión mayoritaria no se las ha llamado relaciones de preferencia e indiferencia, res pectivamente. Como se verá más adelante, tales relaciones no siempre cumplen los axiomas de la definición 1-1.

El resultado que se adelantó más arriba puede ahora expresarse así:

4-2. <u>Teorema.</u> <u>Sea Σ un conjunto de conjuntos de alternativas compuestos exactamente de dos elementos cada uno. Para cada $S \in \Sigma$ las relaciones P e I obtenidas por decisión mayoritaria son relaciones de preferencia e indiferencia, respectivamente, y, llamando f_S a la función que a cada familia de relaciones de preferencia o indiferencia sobre S le hace corresponder la relación de preferencia o indiferencia construída a partir de P e I, el conjunto de funciones $\{f_S : S \in \Sigma\}$ es un sistema de elección de bienestar social.</u>

<u>Demostración.</u> La validez de A.1 de 1-1 se deduce fácilmente considerando que el número de elementos de $V_{\underline{x},\underline{y}}$ es mayor, igual o menor que el número de elementos de $V_{\underline{y},\underline{x}}$, valiendo una y sólo una de estas posibilidades.

La relación I es evidentemente reflexiva y simétrica. Además, puesto que S tiene solamente dos elementos, es transitiva y, por lo tanto, es una relación de equivalencia.

La transitividad de P se cumple obviamente, ya que no pueden presentarse simultáneamente los casos $\underline{x}P\underline{y}$ e $\underline{y}P\underline{z}$, puesto que S tiene solo dos elementos y vale A.1.

Se cumple también A.4, puesto que de acuerdo con A.1 puede presentarse solamente lo siguiente: $\underline{x}I\underline{x}$ y $\underline{x}P\underline{y}$, $\underline{y}I\underline{y}$ e $\underline{y}P\underline{x}$, para el primer caso, y $\underline{x}P\underline{y}$ e $\underline{y}I\underline{y}$, $\underline{y}P\underline{x}$ y $\underline{x}I\underline{x}$, para el segundo. Con esto concluye la demostración de que las relaciones P e I son de preferencia e indiferencia, respectivamente, sobre S. Por otra parte, si S y S' son dos elementos de Σ con intersección no vacía, resulta que S = S', ó $S \cap S'$ es un conjunto unitario. De aquí se deduce fácilmente el cumplimiento de la condición impuesta en la definición 2-1; por lo tanto, el conjunto de funciones $\{f_S: S \in \Sigma\}$ es un sistema de elección social. Se demostrará ahora que tal conjunto es un sistema de elección de bienestar social. En efecto, si $\{R_1, \ldots, R_n\}$

y $\{R'_1,\ldots,R'_n\}$ son dos familias de relaciones de preferencia e indiferencia sobre $S \in \Sigma$, tales que, si $\underline{x}$ e $\underline{y}$ pertenecen a S e $i=1,\ldots,n$, R'_i sigue a R_i en preferencia de $\underline{x}$ respecto de $\underline{y}$, indicando en general con c(X) al número de elementos del conjunto X (o cardinal de X), se tiene

$$c(V'_{x,y}) \geqq c(V_{x,y}) \qquad (1)$$

$$c(V_{y,x}) \geqq c(V'_{y,x}) \qquad (2)$$

donde, en general, $V'_{\underline{w},\underline{z}} = \{i: wR'_i z\}$.

Sean P e I las relaciones de preferencia e indiferencia respectivamente obtenidas por decisión mayoritaria de $\{R_1,\ldots,R_n\}$ y P' e I' las obtenidas con el mismo método de $\{R'_1,\ldots,R'_n\}$. Luego, si $\underline{xPy}$ resulta $c(V_{x,y}) > c(V_{y,x})$, de donde, por (1) y (2), se tiene $c(V'_{x,y}) > c(V'_{y,x})$, con lo cual $\underline{xP'y}$. Si $\underline{xIy}$, se tiene que $c(V_{x,y}) = c(V_{y,x})$, y nuevamente por (1) y (2), resulta $c(V'_{x,y}) \geq c(V'_{y,x})$, de donde $\underline{xR'y}$, siendo R' la relación de preferencia construida a partir de P' e I'. Por lo tanto, para cada $S \in \Sigma$, la función f_S asocia positivamente valores individuales y sociales.

Si $\underline{x}, \underline{y}$ es un par de alternativas distintas, de S (siendo $S = \{x,y\}$), poniendo $\underline{x}I_i\underline{x}$, $\underline{y}I_i\underline{y}$, $\underline{y}P_i\underline{x}$, se obtiene, para cada $\underline{i} = 1,\ldots,\underline{n}$ una relación de indiferencia o preferencia, R_i, en S. Como $c(V_{x,y}) = 0$, mientras que $c(V_{y,x}) = \underline{n}$, resulta $\underline{y}P\underline{x}$, siendo P la relación de preferencia obtenida por decisión mayoritaria de $\{R_1,\ldots,R_n\}$. Luego las funciones f_S no son impuestas.

Supóngase que para $S = \{x,y\}$ resulta f_S dictatorial. Sea $\underline{k}$ el índice de la definición 3-4 y $\{R_1,\ldots,R_n\}$ la familia de relaciones de preferencia o indiferencia sobre S definida como sigue:

$\underline{x}P_k\underline{y}$, y, para todo $\underline{i} \neq \underline{k}$, $\underline{y}P_i\underline{x}$. Luego $c(V_{x,y}) = 1$ y $c(V_{y,x}) = n-1$. Como, por hipótesis, es $\underline{n} > 1$, resulta $\underline{y}R\underline{x}$, donde $R = f_S(\{R_1,\ldots,R_n\})$, en contra de la hipótesis formulada al principio.

Esto termina la demostración del teorema.

Cuando el conjunto Σ contiene conjuntos de alternativas con más de dos elementos el problema de la existencia de un sistema de elección de bienestar social se presenta más complicado, como lo demuestra el siguiente ejemplo: supóngase $S = \{x,y,z\}$ y tres relaciones de preferencia sobre S, $\underline{x}P_1\underline{y}$, $\underline{y}P_1\underline{z}$; $\underline{y}P_2\underline{z}$, $\underline{z}P_2\underline{x}$; $\underline{z}P_3\underline{x}$, $\underline{x}P_3\underline{y}$ (obtenidas permutando cíclicamente los elementos de S). Siendo P e I las relaciones obtenidas por decisión mayoritaria, resulta $\underline{x}P\underline{y}$, $\underline{y}P\underline{z}$, $\underline{z}P\underline{x}$. Se observa, entonces, que P no es una relación de preferencia puesto que no es transitiva; luego no se puede aplicar el método de decisión por mayoría.

Se demostrará más adelante que no existe un sistema de elección de bienestar social sobre un conjunto Σ que contenga conjuntos de alternativas de más de dos elementos. Para ello se necesitarán algunas definiciónes y lemas previos.

4-3. <u>Definición</u>. Sea f_S una función social, $\underline{x}$ e $\underline{y}$ dos elementos de S y V un subconjunto del intervalo natural $[1,n]$, $\underline{n} \geq 1$. Se dice que V es "decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$ respecto de f_S y de $\underline{n}$" si, para toda familia $\{R_1,\ldots,R_n\}$ de relaciones de preferencia o indiferencia sobre S, tal que, para todo $\underline{i} \in V$, se cumple $\underline{xP_iy}$, resulta $\underline{xPy}$, donde P es la relación de preferencia correspondiente a $f_S(\{R_1,\ldots,R_n\})$.

Cuando estén sobreentendidos la función f_S y el número natural $\underline{n}$, diremos simplemente que V es decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$.

Si V es un conjunto decisivo para x versus y, cualquier otro conjunto V' que lo contenga es también decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$. Este hecho conduce a la siguiente definición:

4-4. Definición. Un conjunto V, decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$ respecto de f_S y de $\underline{n}$, es decisivo "minimal" si no contiene subconjuntos propios decisivos para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$ respecto de f_S y de $\underline{n}$.

Si S es un conjunto de dos alternativas $\underline{x}$ e $\underline{y}$, f_S la función social que se obtiene por decisión mayoritaria y $\underline{n}$ el número de votantes, resulta que cualquier subconjunto del intervalo natural $[1,n]$ con un número de elementos mayor o igual que $(n/2)+1$ ó que $(n+1)/2$, según sea $\underline{n}$ par o impar respectivamente, es decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$ y para $\underline{y}$ versus $\underline{x}$ respecto de f_S y de $\underline{n}$. Los conjuntos decisivos minimales son aquellos de exactamente $(n/2) + 1$ ó $(n+1)/2$ elementos, para $\underline{n}$ par o impar, respectivamente.

4-5. Lema. Sean f_S una función de bienestar social , $\underline{x}$ e $\underline{y}$ dos elementos de S y V un subconjunto del intervalo natural $[1,n]$. Si existe una familia $\{R_1,\ldots,R_n\}$ de relaciones de indiferencia o preferencia sobre S tal que

a) para todo $\underline{i} \in V$ se tiene $\underline{x}P_i\underline{y}$, y, para todo $\underline{i} \notin V$, se tiene $\underline{y}P_i\underline{x}$,

b) siendo P la relación de preferencia correspondiente a $f_S(\{R_1,\ldots,R_n\})$, se cumple $\underline{x}P\underline{y}$, resulta que V es decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$ respecto de f_S y de $\underline{n}$.

Demostración. Sea $\{R'_1 ,\ldots, R'_n\}$ una familia de relaciones de preferencia o indiferencia sobre S tal que, para todo $\underline{i} \in V$, se cumple $\underline{x}P'_i\underline{y}$. En estas condiciones resulta que, para $\underline{i}=1,\ldots,\underline{n}$, R'_i sigue a R_i en preferencia de $\underline{x}$ respecto de $\underline{y}$. En efecto, si $\underline{x}P_i\underline{y}$, por la condición a) de la hipótesis, se tiene $i\in V$, con lo cual $\underline{x}P'_i\underline{y}$, y como, por otra parte, la posibilidad $\underline{x}I_i\underline{y}$ está excluída, resulta lo afirmado. Luego, llamando $R = f_S(\{R_1,\ldots,R_n\})$ y $R'= = f_S(\{R'_1,\ldots,R'_n\})$, puesto que f_S asocia positivamente valores individuales y sociales, resulta que R' sigue a R en preferencia de $\underline{x}$ respecto de $\underline{y}$, y como, además, se tiene, por hipótesis, $\underline{x}P\underline{y}$, se deduce finalmente $\underline{x}P'\underline{y}$.

4-6. Lema. Sea f_S una función de bienestar social. Para todo par $\underline{x}$, $\underline{y}$ de elementos distintos de S, el intervalo natural $N = [1,n]$ es decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$ respecto de f_S y de $\underline{n}$.

Demostración. Sea $\{R_1,\ldots,R_n\}$ una familia de relaciones de indiferencia o preferencia sobre S tal que, para $\underline{i}=1,\ldots,\underline{n}$, se cumple $\underline{x}P_i\underline{y}$, y sea $R = f_S(\{R_1,\ldots,R_n\})$. Puesto que f_S no es impuesta existe una familia $\{R'_1,\ldots,R'_n\}$ de relaciones de indiferencia o preferencia sobre S tal que, siendo $R' = f_S(\{R'_1,\dots,R'_n\})$, se cumple $\underline{x}P'\underline{y}$, donde P' es la relación de preferencia correspondiente a R'.

Como, para $\underline{i}=1,\dots,\underline{n}$, R_i sigue a R'_i en preferencia de $\underline{x}$ respecto de $\underline{y}$, se tiene, por la positiva asociación de valores individuales y sociales, que R sigue a R' en preferencia de $\underline{x}$ respecto de $\underline{y}$, y como $\underline{x}P'\underline{y}$, se tiene $\underline{x}P\underline{y}$, con lo cual N es decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$ respecto de f_S y de $\underline{n}$.

4-7. <u>Lema.</u> Sea f_S una función de bienestar social sobre un conjunto S compuesto por lo menos de tres elementos, $\underline{x}$ e $\underline{y}$ dos elementos distintos de S, y V un subconjunto del intervalo natural $[1,n]$ decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$ respecto de f_S y de $\underline{n}$. Entonces: a) para todo $\underline{z}\in S$, $\underline{z}\neq\underline{x}$, resulta V decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{z}$ respecto de f_S y de $\underline{n}$; b) para todo $\underline{z}\in S$, $\underline{z}\neq\underline{y}$, resulta V decisivo para $\underline{z}$ versus $\underline{y}$ respecto de f_S y de $\underline{n}$.

<u>Demostración:</u> a) Sean $\underline{z}\neq\underline{x}$ y $\{R_1,\dots,R_n\}$ la familia de relaciones de preferencia o indiferencia

sobre S definida como sigue:

1) Para todo $\underline{i} \in V$, $\underline{x}P_i\underline{y}$, $\underline{y}P_i\underline{z}$, $\underline{z}I_i\underline{w}$, donde, en general, $\underline{w}$ designa a los elementos de S distintos de $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

2) Para todo $\underline{i} \notin V$, $\underline{y}P_i\underline{z}$, $\underline{z}P_i\underline{x}$, $\underline{x}I_i\underline{w}$, donde, en general $\underline{w}$ designa a los elementos de S distintos de $\underline{y}$ y de $\underline{z}$.

De 1) y 2) se deduce que para todo $\underline{i} \in V$, $\underline{x}P_i\underline{z}$, y para todo $\underline{i} \notin V$, $\underline{z}P_i\underline{x}$, con lo cual la familia $\{R_1,\ldots,R_n\}$ está en las condiciones de la hipótesis a) del lema 4-5. También cumple la hipótesis b) del mismo lema, puesto que de 1) y del hecho de ser V decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$, se deduce $\underline{x}P\underline{y}$, donde P es la relación de preferencia correspondiente a $f_S(\{R_1,\ldots,R_n\})$, y ya que, por 1) y 2), para $\underline{i}=1,\ldots,\underline{n}$, se tiene $\underline{y}P_i\underline{z}$, aplicando el lema 4-6 resulta $\underline{y}P\underline{z}$, de donde, por la transitividad de P, se tiene $\underline{x}P\underline{z}$. Aplicando, entonces, el lema 4-5, se deduce que V es decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{z}$, respecto de f_S y de $\underline{n}$.

b) Se demuestra en forma similar a la parte anterior, considerando $\underline{z}\neq\underline{y}$ y la familia $\{R_1,\ldots,R_n\}$

de relaciones de preferencia o indiferencia sobre S definida por:

3) Para todo $\underline{i} \in V$, $\underline{z}P_i\underline{x}$, $\underline{x}P_i\underline{y}$, $\underline{y}I_i\underline{w}$, donde, en general, $\underline{w}$ designa a los elementos de S distintos de $\underline{z}$ y $\underline{x}$.

4) Para todo $\underline{i} \notin V$, $\underline{y}P_i\underline{z}$, $\underline{z}P_i\underline{x}$, $\underline{x}I_i\underline{w}$, designando, en general con $\underline{w}$ a los elementos de S distintos de $\underline{y}$ y $\underline{z}$.

4-8. Corolario. Sea f_S una función de bienestar social sobre un conjunto S compuesto por lo menos de tres elementos. Si, para un par $\underline{x}$, $\underline{y}$ de elementos de S, se tiene que un conjunto V es decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$ respecto de f_S y de $\underline{n}$, entonces, para todo par $\underline{u}$,$\underline{v}$ de elementos distintos de S, se tiene que V es decisivo para $\underline{u}$ versus $\underline{v}$ respecto de f_S y de $\underline{n}$.

Demostración. Si $\underline{u} \neq \underline{y}$, por la parte b) del lema anterior, se tiene que V es decisivo para $\underline{u}$ versus $\underline{y}$, de donde, siendo, $\underline{u} \neq \underline{v}$, por la parte a) del mismo lema, resulta V decisivo para $\underline{u}$ versus $\underline{v}$.

Si $\underline{u}=\underline{y}$, sea $\underline{z}$ un elemento de S distinto de $\underline{x}$ y de $\underline{y}$. Por la parte a) del lema anterior, se tiene que V es decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{z}$, y siendo $\underline{y}\neq\underline{z}$, por la parte b), resulta V decisivo para $\underline{y}$ versus $\underline{z}$, y como $\underline{u}=\underline{y}$ y $\underline{u}\neq\underline{v}$, aplicando nuevamente la parte a) se deduce que V es decisivo para $\underline{u}$ versus $\underline{v}$.

Teniendo en cuenta el corolario anterior, nos referiremos desde ahora en adelante a "conjuntos decisivos" sin referirlos a un par de alternativas en especial. (Cuando sea necesario, se agregará la locución: "respecto de f_S y de $\underline{n}$", que en general estará sobreentendida).

4-9. Corolario. Si f_S es una función de bienestar social sobre un conjunto S compuesto por lo menos de tres alternativas, ningún conjunto unitario es decisivo respecto de f_S y de $\underline{n}$.

Demostración. Sea V un conjunto unitario, digamos $V = \{k\}$, $1 \leq \underline{k} \leq \underline{n}$, y sea $\underline{x}$, $\underline{y}$ un par de alternativas distintas de S. Si V es decisivo se tendrá, en particular, por el corolario anterior, que V es decisivo para $\underline{x}$ versus $\underline{y}$, de donde, para toda familia $\{R_1,\ldots,R_n\}$ de relaciones de indiferencia o preferencia sobre S tales que $\underline{xP_ky}$, resulta $\underline{xPy}$, donde P es la relación de preferencia correspondiente a $f_S(\{R_1,\ldots,R_n\})$. Pero entonces f_S es una función dictatorial, en contra de la hipótesis (ver 3-4).

Se está ahora en condiciones de demostrar el teorema adelantado más arriba sobre la no existencia de sistemas de elección de bienestar social sobre conjuntos Σ que contienen conjuntos de alternativas compuestos de más de dos elementos.

4-10. Teorema. No existen funciones de bienestar social sobre conjuntos compuestos por más de dos alternativas.

Demostración. Se supondrá la existencia de una función social f_S sobre un conjunto S compuesto por lo menos de tres alternativas $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$. Sea V un conjunto decisivo minimal respecto de f_S y de $\underline{n}$. (Siempre existe tal conjunto puesto que, según el lema 4-6, el conjunto $\underline{N} = [1,n]$ es decisivo).

Sean V_1 un subconjunto unitario de V (digamos, $V_1 = \{1\}$, $V_2 = V-V_1$ y $V_3 = N-V$). Sea $\{R_1,\dots,R_n\}$ la familia de relaciones de indiferencia o preferencia sobre S definida por:

1) $\underline{x}P_1\underline{y}$, $\underline{y}P_1\underline{z}$, $\underline{z}I_1\underline{w}$, para todo $\underline{w}$ tal que $\underline{w}\neq\underline{x}$, $\underline{w}\neq\underline{y}$.

2) Para todo $\underline{i}\in V_2$, $\underline{z}P_i\underline{x}$, $\underline{x}P_i\underline{y}$, $\underline{y}I_i\underline{w}$, para todo $\underline{w}$ tal que $\underline{w}\neq\underline{z}$, $\underline{w}\neq\underline{x}$.

3) Para todo $\underline{i}\in V_3$, $\underline{y}P_i\underline{z}$, $\underline{z}P_i\underline{x}$, $\underline{x}I_i\underline{w}$, para todo $\underline{w}$ tal que $\underline{w}\neq\underline{y}$, $\underline{w}\neq\underline{z}$.

Sea, por último, $R = f_S(\{R_1,\dots,R_n\})$.

Como $V=V_1\cup V_2$ se tiene que, para todo $\underline{i}\in V$, $\underline{x}P_i\underline{y}$, y siendo V decisivo resulta $\underline{x}P\underline{y}$, donde P es la relación de preferencia correspondiente a R. Por otra parte, debe cumplirse $\underline{y}R\underline{z}$, porque si, en caso contrario, se tuviera $\underline{z}P\underline{y}$, como para todo $\underline{i}\in V_2$ es $\underline{z}P_i\underline{y}$ y para todo $\underline{i}\notin V_2$ es $\underline{y}P_i\underline{z}$ resultaría, por el lema 4-5, V_2 decisivo, en contra de la hipótesis de ser V decisivo minimal.

De $\underline{xPy}$ e $\underline{yRz}$ se deduce, por los axiomas 3) y 4) de 1-1, $\underline{xPz}$, y como además, de 1), 2) y 3), resulta $\underline{xP_1z}$ y, para todo $i \neq 1$, $\underline{zP_ix}$, se tiene, por el lema 4-5, que V_1 es decisivo, en contra del corolario 4-9. Esto termina la demostración del teorema.

5. El teorema de Arrow y el efecto Condorcet.

De las precedentes consideraciones se deduce el llamado "teorema de Arrow" cuyo enunciado nos ofrece Attali en los siguientes términos:

"Si se busca un procedimiento constitucional que permita definir una opinión colectiva partiendo de la opinión de dos electores, como mínimo, sobre un número de opciones de tres, como mínimo, y se exige que este procedimiento respete las exigencias de soberanía y de lealtad, los <u>únicos procedimientos posibles son los dictatoriales</u>, es decir, los procedimientos que adoptan como opinión de la colectividad la opinión de uno de los votantes, o incluso una opinión predeterminada de acuerdo con un sistema exterior de valores" (1).

En relación con los conceptos de "soberanía y de lealtad" a que se refiere Attali al enunciar el teorema de Arrow dice previamente el propio Attali lo siguiente:

"...Soberanía de la sociedad política. El procedimiento constitucional no excluye ninguna posibilidad para la elección de la colectividad. En cierto modo, es la prohibición de prohibir a la colectividad..."

"...Lealtad frente a los individuos. El procedimiento debe ser tal que si para cierto estado de la opinión el debate conduce a la sociedad política a preferir a *a* con respecto a *b* y si, en un nuevo estado de la opinión, todos los votantes que preferían a *a* con respecto a *b* continúan haciendo lo mismo, el procedimiento deberá, a partir de este nuevo estado,

---

1) Attali, obra y traducción citadas, pág. 36.

ofrecer todavía una preferencia de a con respecto a b en la preferencia colectiva".

"En otros términos, si el procedimiento constitucional es tal que un grupo de votantes pueda imponer su preferencia sobre una alternativa, y si este grupo gana nuevos miembros para su causa, el procedimiento no deberá permitir que el grupo así reforzado no pueda ya imponer su preferencia a la colectividad sobre esta alternativa" (1).

"Antecedente remoto", como dice Attali (2), de los estudios de Arrow sobre los sistemas de elección de bienestar social fueron los del matemático francés Condorcet a los que el propio Attali, bajo el epígrafe "Procedimiento mayoritario y efecto Condorcet", se refiere en los siguientes términos:

"En primer lugar, es natural estudiar el

---

1) Attali, obra y traducción citadas, págs. 24 y 35.

2) Attali, obra y traducción citadas, pág. 30.

procedimiento más intuitivo, el más clásico de decisión colectiva -el procedimiento mayoritario- y ver cuáles son sus diversos aspectos".

"Evidentemente, hay diversas formas de reglas mayoritarias. Como no estamos preocupados únicamente por elegir una opción entre el conjunto de opciones propuestas, sino por clasificarlas todas en relación recíproca, el método que se impone consiste en clasificar los diferentes pares de opciones propuestas (A, B) diciendo que A <u>es preferido</u> a B si el número de votantes que prefieren a A con respecto a B es superior al número de votantes que prefieren a B con respecto a A."

"a) <u>Ejemplo de procedimiento mayoritario</u>. Se solicita a cada votante que exprese su opinión individual (u orden de preferencia entre los candidatos). Por ejemplo, si hay tres candidatos a una elección, hay seis opiniones individuales posibles. Supondremos que el resultado del escrutinio sea el siguiente:

el orden (a, b, c) es la opinión de 26 votantes

--	(a, c, b)	--	12	--
--	(b, a, c)	--	15	--
--	(b, c, a)	--	33	--
--	(c, a, b)	--	2	--
--	(c, b, a)	--	12	--
			100"	

"Observamos que tenemos la clasificación colectiva siguiente:

- 40 personas clasificación a a antes que a b; por tanto b es preferido a a, lo que se designa: b > a;

- 53 personas clasificación a a antes que c; en consecuencia a > c;

- 74 personas clasifican a b antes que c; por tanto b > c."

"...la clasificación es transitiva: si un candidato B es preferido a un candidato A, y un candidato A, a un candidato C, el candidato B es preferido al candidato C."

"Pero esta propiedad, que puede parecernos juiciosa ¿es general? ¿No es el resultado de una circunstancia especialmente feliz, de un azar de los datos?".

"b) Paradoja de Condorcet. Es posible, en efecto, que los resultados del escrutinio conduzcan a una intransitividad de las decisiones colectivas. El procedimiento mayoritario arriba definido no asocia un orden colectivo a todo estado de opinión. El estudio de los procedimientos que permiten obtener un orden semejante debe excluir el procedimiento más corrientemente utilizado en la vida de las democracias liberales, que asimismo constituye el propio fundamento de la concepción marxista de la legitimidad del poder".

"Para comenzar ofreceremos un ejemplo".

"Supongamos que hay 60 votantes y que los resultados del escrutinio son los siguientes:

el orden (a, b, c) es la opinión de 23 votantes

el orden (a, c, b) es la opinión de 0 votantes
-- (b, a, c) --- 2 --
-- (b, c, a) --- 17 --
-- (c, a, b) --- 10 --
-- (c, b, a) --- 8 --"

"El recuento ofrece:

a es preferido a b por 33 votos contra 27;
b es preferido a c por 42 votos contra 18;
c es preferido a a por 35 votos contra 25".

"Consecuentemente, la lógica de la decisión colectiva ya no es la misma que la de las decisiones individuales. En esto estriba la paradoja de Condorcet. La asimilación del cuerpo electoral a un individuo, pues, puede conducir a graves errores, ya que no es idéntica la naturaleza de la lógica del comportamiento..."

....

"...Tal vez el lector haya creído, al leer lo que precede, que la paradoja de Condorcet sólo es tal vez una curiosidad matemática, que rara vez se produce, para unos estados de opinión muy particulares..."

"Sin embargo, el único problema es que la paradoja de Condorcet no actúa únicamente en casos excepcionales:

Si hay tres opciones propuestas y n electores, un pequeño razonamiento matemático muestra que:

Si hay 3 votantes, 5'6% de los estados de la opinión engendran el efecto Condorcet.

Si hay 5 votantes, 6'9% de los estados de la opinión engendran el efecto Condorcet.

Si hay 7 votantes, 7'5% de los estados de la opinión engendran el efecto Condorcet.

Si hay 9 votantes, 7'8% de los estados de la opinión engendran el efecto Condorcet."

"Cuanto más numerosa es la sociedad políti ca, mayores probabilidades existen de que una decisión colectiva sea intransitiva. Pero esta probabilidad tiende hacia un límite (próximo al 8'8%) ya que, cuando el número de electores aumenta, un elector suplementario tiene cada vez menores probabilidades de influir en la decisión colectiva. Por ello, el fenómeno tiene casi tantas probabilidades de manifestarse en el marco de un consejo de administración, incluso de una asamblea parlamentaria que en el caso de un referéndum."

"Cuando lo que aumenta es el número de opciones propuestas al voto, la probabilidad de ver aparecer el efecto Condorcet aumenta hasta llegar a la certeza."

"Efectivamente, en este caso, el número de clasificaciones colectivas intransitivas aumenta mucho más aprisa que el número de clasificaciones transitivas."

"Hay que estudiar, por tanto, cuáles son los procedimientos que permiten obtener el respeto de una racionalidad semejante. Este es el objeto de la teoría de Arrow y de sus prolongaciones" (1).

Investigaciones rigurosas, mediante las que se trata de determinar, utilizando métodos y modelos procedentes de la Lógica y de las Matemáticas, esos "procedimientos que permiten obtener el respeto de una racionalidad semejante" entre las decisiones individuales y las colectivas (pensando en la eliminación o delimitación estricta del "efecto Condorcet", particularmente), vienen desarrollándose con profusión y eficacia desde la aparición, en 1951, del citado libro de Arrow. Las vinculaciones con el Derecho, en general, y con el Derecho político, en particular, de la problemática que constituye el objeto de las investigaciones citadas, e incluso el carácter estrictamente jurídico de algunos aspectos de esa misma problemática, impiden, por otra parte, que los juristas permanezcamos al margen de tales investigacio

---

1) Attali, obra y traducción citadas, págs. 31 y sigs.

nes, y justifican cumplidamente, a mi modo de ver, la inclusión en el presente trabajo de unas elementales referencias a los estudios de Condorcet y de Arrow en las que esas mismas investigaciones se fundan. Noticias más extensas sobre la utilización de los métodos que nos suministran las diversas ramas de la Matemática de nuestros días (la teoría de juegos, especialmente) para el estudio y correcta determinación de eso que Attali denomina acertadamente "los mejores procedimientos de decisión colectiva" (1), así como sobre los resultados obtenidos mediante la indicada utilización, pueden verse asimismo en la interesantísima obra de dicho autor que he venido citando en los dos últimos capítulos del presente trabajo.

\- - -

1) Attali, obra y traducción citadas, pág. 30.

C O N C L U S I O N E S

A través de ese ensayo de iniciación a un "análisis particularizado de las estructuras lógico-matemáticas a considerar en el Derecho" que, como he anunciado en la introducción al presente trabajo, he tratado de ofrecer en el desarrollo del mismo, entiendo que puede llegarse a las conclusiones siguientes:

P R I M E R A

La presencia de estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático -estructuras algebraicas, estructuras topológicas y estructuras de orden- en el campo específico del Derecho es evidente.

Ejemplos significativos -aunque no únicos, desde luego- de la mencionada presencia son, como he tratado de destacar en el desarrollo de este trabajo, la estructura típicamente algebraica que podemos observar en el razonamiento del juez cuando relaciona hechos y fundamentos de Derecho para obtener, como resultado, una sentencia, y la necesidad de considerar la estructura topológica del par $\langle d, p \rangle$, constituído por un delito, d, y la pena que le corresponde, p, cuando, en relación con el indicado par, tenemos en cuenta el transcurso del tiempo y, consecuentemente, lo dispuesto sobre prescripción de penas en el artículo 115 de nuestro Código Penal. Por lo que se refiere a las estructuras de orden, entiendo que mucho más difícil que encontrar ejemplos de tales estructuras en el campo específico del Derecho sería encontrar en ese mismo campo situaciones en las que no aparezcan, en alguna de sus modalidades, estructuras del indicado tipo: como ejemplo fundamental, en relación con las presentes consideraciones, puede muy bien tomarse, a mi modo de ver, el carácter de conjunto ordenado de la denominada "pirámide de Kelsen" al que he aludido en el capítulo tercero de este trabajo.

S E G U N D A

Tanto el campo de utilización de las estructuras algebraicas en la lógica actual como la eficacia de dicha utilización pueden ampliarse considerablemente cuando de lo que se trata es de aplicar los métodos algebraicos propios de dicha lógica a la lógica y a la metodología jurídicas.

Puede comprobarse con facilidad la afirmación precedente si se tiene en cuenta que, en los métodos operatorios de naturaleza algebraica que se utilizan en el desarrollo y sistematización de la lógica actual, el concepto "verdadero", típico en dicha lógica, puede ser sustituído, en determinados casos, sin que dichos métodos operatorios pierdan su validez ni su eficacia, por algún otro concepto que nos interese utilizar al considerar problemas concretos de naturaleza específicamente jurídica (por ejemplo, por el concepto "permitido"), y que, asimismo, también en ciertos casos, puede ser sustituído, en la utilización de los citados métodos operatorios, el par de valores contrapuestos "verdadero-falso" por algún otro par de valores también contrapuestos (entre los que prevalezcan asimismo los principios de contradicción y del "tertium non datur") que nos interese utilizar en el campo específico del Derecho, como "permitido-prohibido", "justo-injusto", etc. Las ideas de Blanché sobre "oposición de conceptos", y, particularmente, la adaptación de tales ideas a la lógica deóntica a través de la distribución exagonal de los functores básicos para el desarrollo de dicha lógica a que he hecho referencia en diversos capítulos del presente trabajo, nos suministran una amplia y sólida base para la determinación de esos pares de valores contrapuestos válidos en la aplicación de los mencionados métodos operatorios de naturaleza algebraica en el campo específico del Derecho. Si tenemos en cuenta, por otra parte, la particular trascendencia de la disyunción exclusiva en ese mismo campo específico del Derecho, la analogía que, con vistas a la utilización de los métodos operatorios a que me vengo refiriendo, existe entre la mencionada modalidad de disyunción y la diferencia simétrica (o diferencia entre la unión y la intersección) en teoría de conjuntos, y el hecho de que los cálculos algebraicos en los que se utiliza tal diferencia simétrica pueden adaptarse a la estructura de grupo (contrariamente a lo que ocurre cuando se utilizan, en lógica, independientemente, la unión y la intersección), podemos llegar asimismo a la conclusión de que, al resultar particularmente idóneas la lógica y la metodología jurídicas para la aplicación en ellas de los procesos operatorios en los que se utiliza la indicada estructura algebraica fundamental, la eficacia que la utilización de las estructuras algebraicas reviste en la lógica actual resulta considerablemente ampliada cuando tal utilización se lleva a cabo tomando en consideración la lógica y la metodología jurídicas específicamente.

T E R C E R A

La noción de categoría que, en relación con los conceptos de conjunto y estructura lógico-matemática, se nos presenta como una "abstracción de orden superior", y cuya influencia en la actual evolución del pensamiento matemático es decisiva, puede y debe ser tenida en cuenta asimismo en una correlativa evo lución del pensamiento jurídico.

A la anterior conclusión debe llegarse, a mi modo de ver, en efecto, considerando la trascendencia que los conceptos matemáticos (conjunto, morfismo, etc.) mediante los que se define el de categoría revisten en el campo del Derecho (bien directamente o bien a través de la consideración de isomorfías entre estructuras que se pretenda delimitar en dicho campo y estructuras que se nos presentan en disciplinas conexas), y teniendo en cuenta, por otra parte, la naturaleza jurídica que puede observarse en muchos de los elementos que constituyen los conjuntos de morfismos necesarios para definir categorías cuando lo que se pretende es que dichas definiciones de categorías se deriven precisamente de la aplicación de los métodos matemáticos a las ciencias sociales.

CUARTA

Es evidente el interés que para los juristas deben revestir tanto el concepto de sistema (ya de por sí notoriamente vinculado al de estructura) como la aplicación, en el estudio de diversos tipos de sistemas sociales y políticos, de las relaciones entre esos mismos tipos de sistemas y estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático.

Ejemplos de la mencionada aplicación, cuya utilidad en nuestros días es innegable, los he ido exponiendo en el capítulo tercero, al relacionar la definición de tríada que nos ofrece Caplow con el contenido del presente trabajo, y en los dos últimos capítulos del mismo. Al desarrollar la exposición de tales ejemplos he tratado de destacar asimismo el interés que para los juristas deben revestir los estudios que a través de la consideración de estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático y en relación con diversos tipos de sistemas sociales y políticos vienen realizándose en estos últimos años.

QUINTA (CONCLUSION FINAL).

Las múltiples y fundamentales conexiones de las estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático con el Derecho, de las que, aunque haya sido en forma parcial y sumaria, me he ocupado, desde diversos puntos de vista, en el desarrollo de este trabajo, deben llevarnos forzosamente, a mi modo de ver, a la conclusión de que es imposible la existencia en nuestros días de un genuino pensamiento jurídico, en sentido genérico, que no permanezca estrechamente vinculado al pensamiento lógico-matemático.

De las relaciones con el Derecho de las estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático, por otra parte, se deriva, de acuerdo con lo que he indicado en la introducción al presente trabajo, la posibilidad de aplicación, en el tratamiento de problemas de naturaleza jurídica, de esas "técnicas lógico-matemáticas comunes cuyo empleo tiende a generalizarse" a las que alude Piaget como hemos visto en la introducción mencionada: en realidad, tal aplicación viene realizándose con éxito en diversos campos, como el de la informática, por ejemplo, y tanto las investigaciones encaminadas a ampliar y hacer más efectiva dicha aplicación como los resultados de las mismas difícilmente pueden ser ignorados en la actualidad por los juristas. Objetivo inmediato de este trabajo es, desde luego, ofrecer una iniciación a un análisis de determinadas estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático que se nos presentan en el campo específico del Derecho, pero me doy cuenta perfectamente, no obstante, de que del análisis mencionado deben derivarse asimismo unos posteriores estudios que tengan por objeto tanto las posibilidades de utilización, directa o indirecta, en ese mismo campo específico del Derecho, de las técnicas lógico-matemáticas que se adaptan a las estructuras analizadas como las ventajas que esa misma utilización pueda traer consigo. Así, pues, por ejemplo, de la consideración de las estructuras de orden que se nos presentan en el campo del Derecho debe derivarse el estudio de la beneficiosa influencia que el rigor lógico-matemático de la teoría de colas ejercerá presumiblemente en el citado campo al aplicarse en el mismo las técnicas inherentes a dicha teoría, y en las estructuras básicas del pensamiento lógico-matemático a considerar en la lógica deóntica o en la teoría de la argumentación y en las "técnicas argumentativas" es asimismo donde debe fundamentarse el estudio de esas prometedoras aplicaciones de la teoría de juegos a las que alude Apostel en los trabajos suyos que he mencionado en el capítulo del presente dedicado al álgebra de la lógica.

\- - -

SIMBOLOS UTILIZADOS

$\in$, pertenencia (de un elemento a un conjunto).

$\subset$, inclusión.

$\cup$, unión.

$\cap$, intersección.

$\emptyset$, conjunto vacío.

$\bar{C}$, complementario de C.

$\neg$, no (negación).

$\wedge$, y (conjunción).

$\vee$, o (disyunción no exclusiva).

$\Rightarrow$, implica.

$\exists$, existe (cuantificador existencial).

$\forall$, para todo (cuantificador universal).

/ (superpuesto a cualquier símbolo), no.

B I B L I O G R A F I A

ABELLANAS, Pedro: GEOMETRIA BASICA, Romo, Madrid, 1969.

AMATO, Niccolò: LOGICA SIMBOLICA E DIRITTO, Giuffrè, Milano, 1969.

APOSTEL, Leo: GAME THEORY AND THE INTERPRETATION OF DEONTIC LOGIC, en "Logique et Analyse", 3, 1960.

APOSTEL, Leo: RHÉTORIQUE, PSYCHO-SOCIOLOGIE ET LOGIQUE, en "La Théorie de l'Argumentation (recueil publié par le Centre National Belge de Recherches de Logique)", Louvain, 1963.

ARROW, Kenneth J.: SOCIAL CHOICE AND INDIVIDUAL VALUES, Wiley, New York. 1951.

ATTALI, Jacques: LOS MODELOS POLITICOS; traducción española de Enrique Muñoz Latorre, Labor, Barcelona, 1974.

BASTIDE, Roger, C. LEVI-STRAUSS, D. LAGACHE, H. LEFEBVRE Y OTROS: SENTIDOS Y USOS DEL TERMINO ESTRUCTURA EN LAS CIENCIAS DEL HOMBRE; versión castellana de Beatriz Dorriots y Guillermo Maci, Paidos, Buenos Aires, 1968.

BECCARIA, Cesare de: DE LOS DELITOS Y DE LAS PENAS; traducción castellana de Juan Antonio de las Casas, Alianza Editorial, Madrid, 1968.

BLANCHÉ, Robert: SUR L'OPPOSITION DES CONCEPTS, en "Theoria", 19, 1953.

BOURBAKI, Nicolas: LA ARQUITECTURA DE LAS MATEMATICAS; traducción castellana publicada en "Las grandes corrientes del pensamiento matemático", EUDEBA, Buenos Aires, 1948.

BOURBAKI, Nicolas: THÉORIE DES ENSEMBLES. FASCICULE DE RÉSULTATS, Hermann, París, 1968.

CANTOR, G.: GESAMMELTE ABHANDLUNGEN, Springer, Berlín, 1932.

CAPLOW, Theodore: DOS CONTRA UNO: TEORIA DE COALICIONES EN LAS TRIADAS; versión española de Natividad Sánchez Sáinz-Trápaga, Alianza Editorial, Madrid, 1974.

CENTRE DE DOCUMENTATION SCIENCES HUMAINES: INFORMATIQUE ET SCIENCES JURIDIQUES, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, París, 1971.

FÉLIX, Lucienne: EXPOSÉ MODERNE DES MATHÉMATIQUES ELEMENTAIRES, Dunod, París, 1966.

FÉLIX, Lucienne: MATEMATICA MODERNA; traducción española de Eduardo V. Hombría y Atilio Piana, Kapelusz, Buenos Aires, 1968.

FORIERS, Paul: L'ÉTAT DES RECHERCHES DE LOGIQUE JURIDIQUE EN BELGIQUE, en "Logique et Analyse", abril 1967.

FOURASTIÉ, Jacqueline: DANS DIX ANS LA THÉORIE DES CATÉGORIES REMPLACERA-T-ELLE CELLE DES EN-

SEMBLES?, en "Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public", febrero 1975.

GARCIA MAYNEZ, Eduardo: LOS PRINCIPIOS DE LA ONTOLOGIA FORMAL DEL DERECHO Y SU EXPRESION SIMBOLICA, Imprenta Universitaria, México, 1953.

GARCIA MAYNEZ, Eduardo: LOGICA DEL JUICIO JURIDICO, Fondo de Cultura Económica, México, 1955.

GARCIA MAYNEZ, Eduardo: LOGICA DEL CONCEPTO JURIDICO, Fondo de Cultura Económica, México, 1959.

GARCIA MAYNEZ, Eduardo: LOGICA DEL RACIOCINIO JURIDICO, Fondo de Cultura Económica, México, 1964.

HALL, F.M.: AN INTRODUCTION TO ABSTRACT ALGEBRA, University Press, Cambridge, 1966.

HERNANDEZ GIL, Antonio: METODOLOGIA DE LA CIENCIA DEL DERECHO, Tecnos, Madrid, 1971.

HERNANDEZ GIL, Antonio: EL ABOGADO Y EL RAZONAMIENTO

JURIDICO, Rivadeneyra, Madrid, 1975.

HILTON, Peter J., y MATTHYS, Jean-Claude: LE LANGAGE DES CATÉGORIES; edición francesa en la que los capítulos originales de Hilton han sido traducidos por Matthys, CEDIC, Lyon, 1973.

HOROWITZ, Joseph: EXPOSÉ ET CRITIQUE D'UNE ILLUSTRATION DU CARACTÈRE PRÉTENDU NON-FORMEL DE LA LOGIQUE JURIDIQUE, en "Archives de philosophie du droit", vol. 11, 1966.

HOROWITZ, Joseph: LA LOGIQUE ET LE DROIT, en "Logique et Analyse", abril 1967.

KALINOWSKI, Georges: INTRODUCTION À LA LOGIQUE JURIDIQUE, Pichon et Durand-Auzias, París, 1965.

KALINOWSKI, Georges: LA LOGIQUE DES NORMES, Presses Universitaires de France, París, 1972.

KELSEN, Hans: TEORIA PURA DEL DERECHO; traducción española de Moisés Nilve y Napoleón Cabrera, EUDEBA, Buenos Aires, 1975.

KLUG, Ulrich: LOGICA JURIDICA; traducción castellana de Juan David García Bacca, Publicaciones de la Facultad de Derecho, Caracas, 1961.

KLUG, Ulrich: JURISTISCHE LOGIK, tercera edición, Springer, Berlín, 1966.

KLUG, Ulrich: LA TEORIA DEL DERECHO NATURAL EN TANTO PROBLEMA DE LA METATEORIA Y DE LA METALOGICA DE LAS NORMAS, versión castellana de Ernesto Garzón Valdés, en "Problemas de Filosofía del Derecho", SUR, Buenos Aires, 1966.

LEGAZ LACAMBRA, Luis: AMOR, AMISTAD, JUSTICIA (Discurso de ingreso en la Real Academia de Jurisprudencia y Legislación), en "Anuario de Filosofía del Derecho", tomo XIII, 1968.

LEGAZ LACAMBRA, Luis: FILOSOFIA DEL DERECHO, Bosch, Barcelona, 1972.

LOMBARDI VALLAURI, Luigi: AMICIZIA, CARITÀ, DIRITTO. L'ESPERIENZA GIURIDICA NELLA TIPOLOGIA DELLE ESPERIENZE DI RAPPORTO, Giuffrè, Milano, 1969.

LOSANO, Mario G.: CORSO DI INFORMATICA GIURIDICA, Cooperativa Universitaria Milanesa, Milano, 1971.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS U.S.A.: LOGICA; traducción española de Federico Velasco Coba y Emilio Lluis Riera, Trillas, México, 1970.

OUBIÑA, Lía: INTRODUCCION A LA TEORIA DE CONJUNTOS, Editorial Universitaria, Buenos Aires, 1965.

PERELMAN, Chaim: DE LA JUSTICIA; traducción española de Ricardo Guerra, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 1964.

PERELMAN, Chaim, y OLBRECHTS-TYTECA, L.: TRAITÉ DE L'ARGUMENTATION, Presses Universitaires de France, París, 1958.

PIAGET, Jean: LE STRUCTURALISME, Presses Universitaires de France, París, 1968.

PIAGET, Jean, y BETH, E.W.: RELACIONES ENTRE LA LOGICA FORMAL Y EL PENSAMIENTO REAL; traducción española de Víctor Sánchez de Zavala, Editorial Ciencia Nueva, Madrid, 1968.

PIAGET, Jean, W. J. M. MACKENZIE, Paul F. LAZARSFELD Y OTROS: TENDENCIAS DE LA INVESTIGACION EN LAS CIENCIAS SOCIALES; versión española de Pilar Carrillo, Alianza Editorial, Madrid, 1973.

REY PASTOR, Julio: LA MATEMATICA SUPERIOR. METODOS Y PROBLEMAS DEL SIGLO XIX, Iberoamericana, Buenos Aires, 1951.

RICHARDSON, M.: ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES MODERNES; traducción francesa de R. de Marcillac y A. Doneddu, Dunod, París, 1963.

SANCHEZ-MAZAS, Miguel: CALCULO DE LAS NORMAS, Ariel, Barcelona, 1973.

SANCHEZ-MAZAS, Miguel: L'ARITHMÉTISATION DU LANGAGE JURIDIQUE ET LE FONCTIONNEMENT D'UN ORDINATEUR, en "Archives de philosophie du droit", 1974.

STOLL, Robert R.: INTRODUCTION TO SET THEORY AND LOGIC, Freeman, San Francisco, 1963.

TAMMELO, Ilmar: OUTLINES OF MODERN LEGAL LOGIC, Steiner, Viesbaden, 1969.

VIEHWEG, Theodor: LA "LOGIQUE MODERNE" DU DROIT; traducción francesa de N. Poulantzas, en "Archives de philosophie du droit", 1966.

VILLAR PALASI, José Luis: LA INTERPRETACION Y LOS APOTEGMAS JURIDICO-LOGICOS A LA LUZ DEL NUEVO TITULO PRELIMINAR DEL CODIGO CIVIL, DESDE UNA PERSPECTIVA TEORICA, Tecnos, Madrid, 1975.

VOLTAIRE: COMENTARIO SOBRE EL LIBRO "DE LOS DELITOS Y DE LAS PENAS"; traducción castellana editada sin nombre de traductor, Alianza Editorial, Madrid, 1968.

VON WRIGHT, Georg Henrik: NORMA Y ACCION. UNA INVESTIGACION LOGICA; traducción española de Pedro García Ferrero, Tecnos, Madrid, 1970.

VON WRIGHT, Georg Henrik, FØLLESDAL Y HILPINEN, HANSON, HINTIKKA, KANGER, Y SEGERBERG: DEONTIC LOGIC. INTRODUCTORY AND SYSTEMATIC READINGS, Reidel, Dordrecht, 1971.

ZOROA, Procopio: MATEMATICAS (VOLUMEN I: CONJUNTOS Y RELACIONES, NUMERO RACIONAL, ALGEBRA LINEAL), Copygraf, Madrid, 1966.

\- - -

INDICE

Página.

- - -